¿Como construir una teoría física?

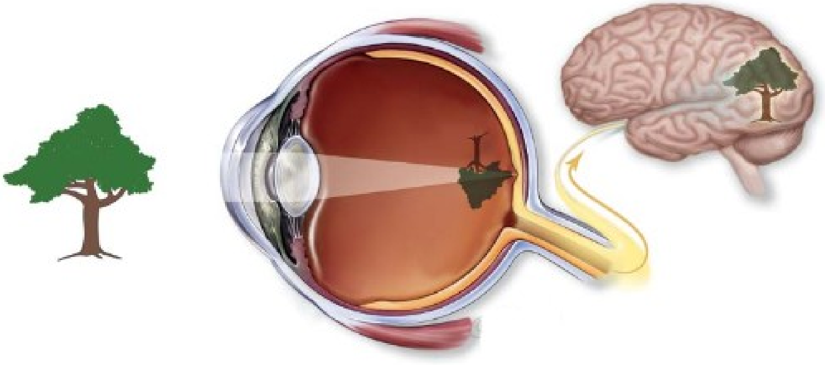
Clase 1 – El Formalismo Positivo

Robert Oeckl

Centro de Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Morelia, México

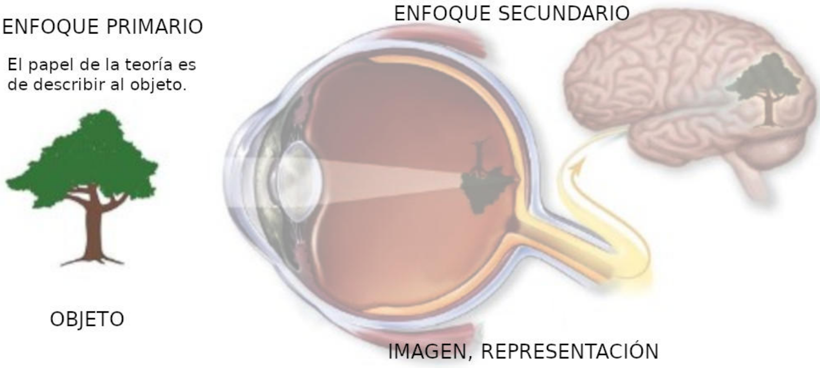
Escuela de Invierno
11 de enero 2021
Materiales:
https://www.matmor.unam.mx/~robert/teaching_es.html

Objeto, percepción, reconstrucción

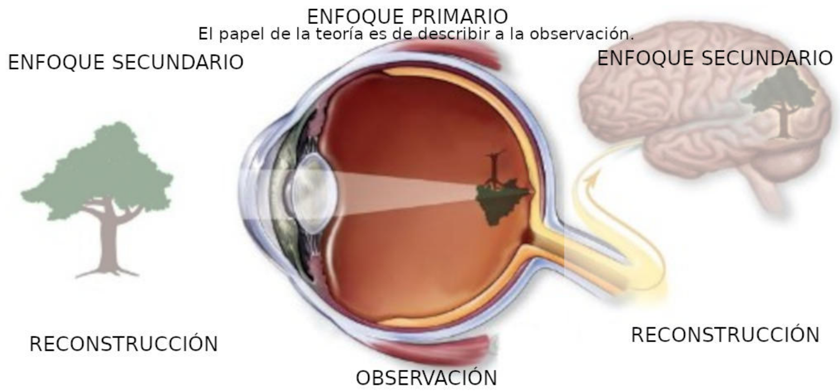


http://tpe.vision.aveugles.free.fr/vision.php

Acercamiento tradicional



Acercamiento operacional



Principios

Observación e intervención como conceptos primarios

El enfoque al objeto es sustituido por un enfoque a la observación como concepto primario. Igualmente primario es el concepto de intervención. Observaciones e intervenciones son descritos de una manera uniforme a través del concepto de **operación**.

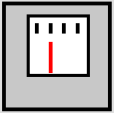
Correlaciones

Predicciones son acerca de correlaciones entre observaciones y posiblemente intervenciones.

Marco probabilistico

Predicciones son de carácter probabilístico en general.

Operaciones



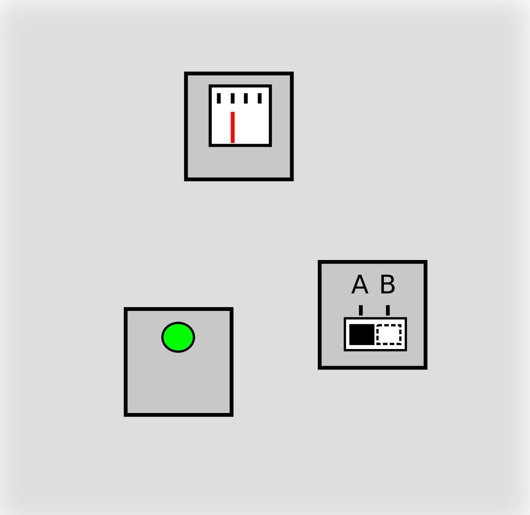
Operación

Concepto primario que resume

- experimento
- medición
- observación
- preparación
- intervención

Representación gráfica como una **caja**.

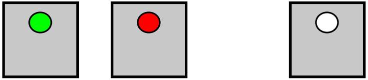
Operaciones



Operaciones pueden implicar **resultados** y también **posiciones**.

Operaciones – Ejemplos

- Un instrumento con una luz que puede mostrar `verde` o `rojo`.

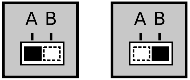


`verde` `rojo` [indeterminado]

- Un instrumento con un indicador.

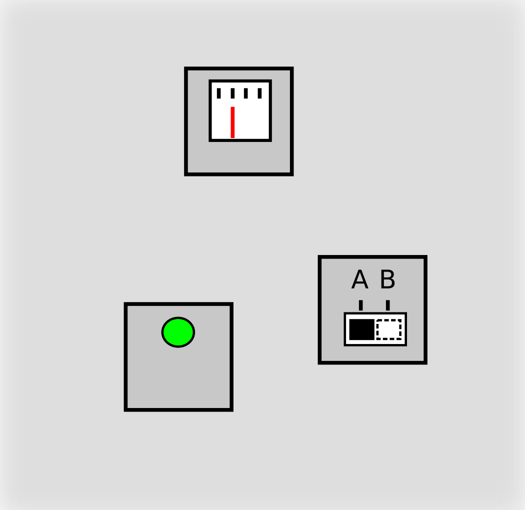
2 [indeterminado]

- Un interruptor de dos posiciones, `A` y `B`.



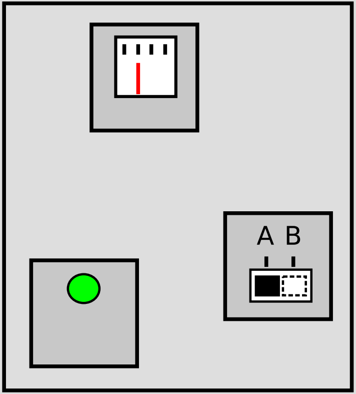
`A` `B`

Operaciones y correlaciones



Operaciones no son aisladas. Resultados dependen de otras operaciones. Queremos predecir **correlaciones**.

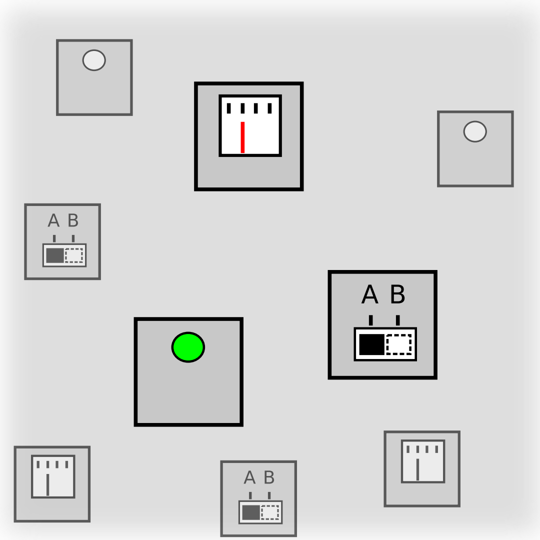
Operaciones y correlaciones



Operaciones no son aisladas. Resultados dependen de otras operaciones. Queremos predecir **correlaciones**.

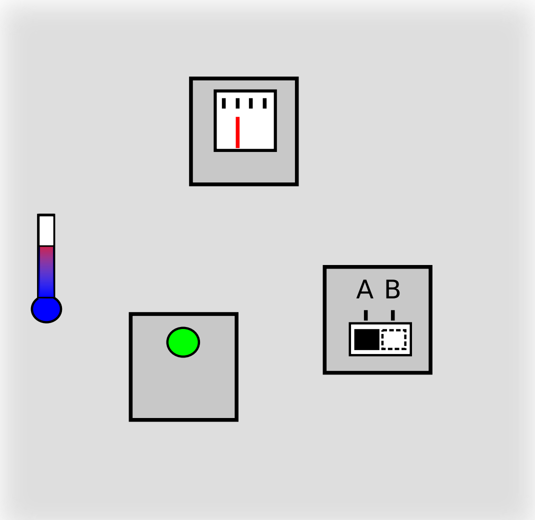
Composiciones de operaciones son operaciones.

Operaciones y correlaciones



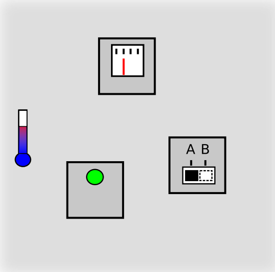
Operaciones no son aisladas. Resultados dependen en general de un gran número de otras operaciones.

Operaciones y correlaciones



Podemos tratar estas operaciones como externas, subsumiéndolos en una sola operación, también llamado **condición de frontera**.

Predicciones probabilísticas

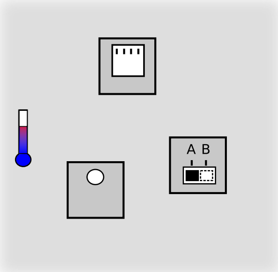


Nos interesa la **probabilidad condicional** de que

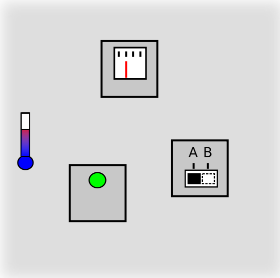
⟵ pasa esto

dado

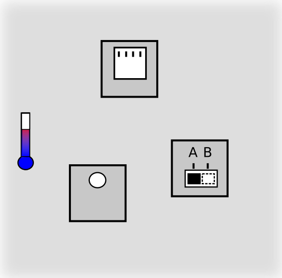
esto ⟶



Predicciones probabilísticas



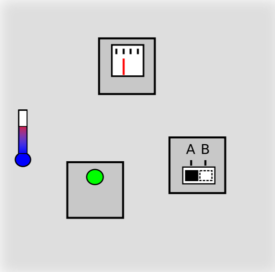
Nos interesa la **probabilidad condicional** de que
⟵ pasa esto
dado
esto ⟶



Compatibilidad (o valor)

es un **número real no-negativo** asignado a cada diagrama.

Predicciones probabilísticas

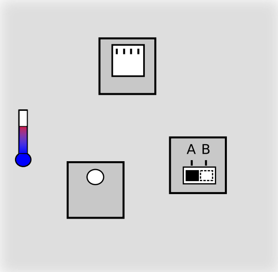


Nos interesa la **probabilidad condicional** de que

⟵ pasa esto

dado

esto ⟶



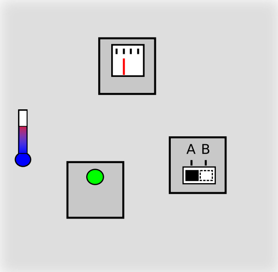
Compatibilidad (o valor)

es un **número real no-negativo** asignado a cada diagrama.

Probabilidad

de un resultado se obtiene como cociente entre las respectivas compatibilidades.

Predicciones probabilísticas

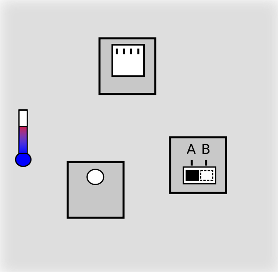


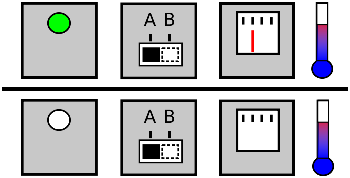
Nos interesa la **probabilidad condicional** de que

⟵ pasa esto

dado

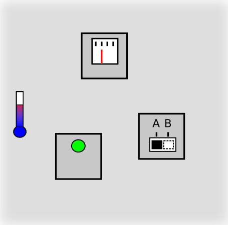
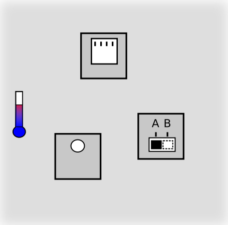
esto ⟶



$P =$ 

Orden parcial y jerarquía de generalidad

Para obtener una probabilidad, $0 \leq P \leq 1$, necesitamos:

$0 \leq$  $\leq$ 

El **orden** entre las **compatibilidades** corresponde a:

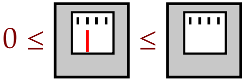
- una jerarquía de **generalidad**: El diagrama de la izquierda es **más especial** y el diagrama de la derecha es **más general**.
- una **implicación**: El diagrama de la izquierda **implica** al diagrama de la derecha, pero no al revés.
- una relación de contenido de **información**: El diagrama de la izquierda contiene **más información** que el de la derecha.

Orden parcial y jerarquía de generalidad

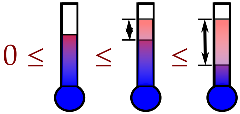
Obtenemos un orden entre compatibilidades a través de un **orden parcial** entre **operaciones**. Ejemplos:

- Un instrumento con una luz que puede mostrar `verde` o `rojo`.

- Un instrumento con un indicador.



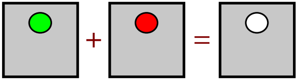
- Un termómetro.



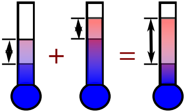
Sumas y combinaciones probabilísticas

Para lograr que probabilidades se suman correctamente necesitamos **sumas probabilísticas** entre **operaciones**. Ejemplos:

- Un instrumento con una luz que puede mostrar `verde` o `rojo`.



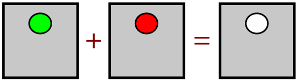
- Un termómetro.



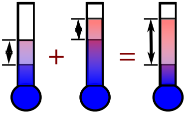
Sumas y combinaciones probabilísticas

Para lograr que probabilidades se suman correctamente necesitamos **sumas probabilísticas** entre **operaciones**. Ejemplos:

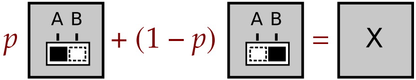
- Un instrumento con una luz que puede mostrar `verde` o `rojo`.



- Un termómetro.



También queremos crear nuevas operaciones a través de **combinaciones probabilísticas**. Ejemplo: $0 \leq p \leq 1$,



Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Podemos formar sumas de (ciertas) operaciones y multiplicarlas con números reales (positivos). Por lo tanto las operaciones son elementos en **espacios vectoriales reales**.

También tenemos relaciones (parciales) de orden entre operaciones. Por lo tanto las operaciones forman **conjuntos parcialmente ordenados**.

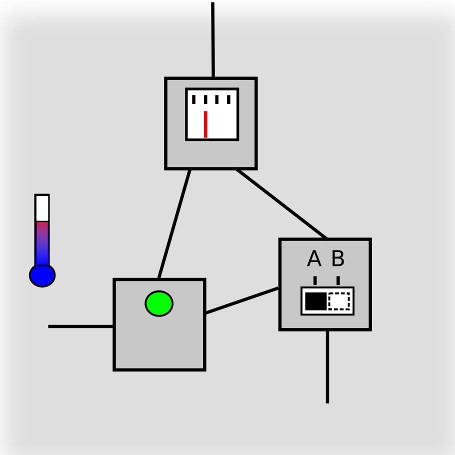
Además, las estructuras de espacio vectorial y de orden parcial son compatibles. Eso lleva a la noción de un **espacio vectorial parcialmente ordenado**.

El origen de estas estructuras viene de los números reales por su papel en la noción de probabilidad.

Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Interfaces y redes

Resultados de operaciones dependen en general solamente de algunas otras operaciones y no de todas.



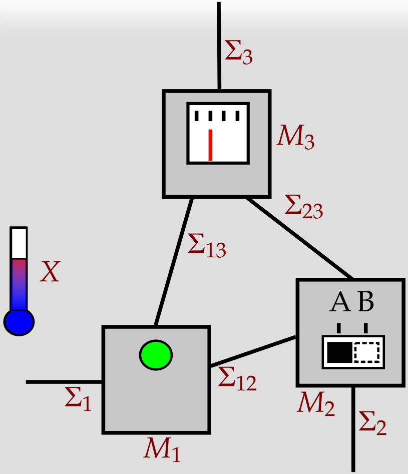
Interface

modela una dependencia entre operaciones.
Representa una señal, comunicación, interacción, intercambio de información.
Se dibuja como una **liga**.

Redes

son formados por operaciones e interfaces, dibujados como **gráficas con etiquetas**.

Tipos de operaciones e de interfaces



Hay diferentes **tipos** de operaciones y diferentes **tipos** de interfaces.

Los tipos codifican cuáles operaciones se pueden componer con cuáles interfaces y de que manera.

Indicamos tipos con **etiquetas**.

Axiomatización – parte I

Tenemos un conjunto Ξ de tipos de interfaces y un conjunto Γ de tipos de operaciones.

P.I

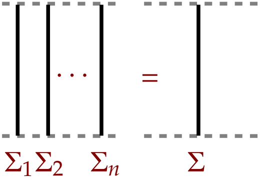
Para cada tipo $\Sigma \in \Xi$ de interface hay un espacio vectorial parcialmente ordenado $\mathcal{B}_\Sigma$.

P.O

Para cada tipo $M \in \Gamma$ de operación hay un espacio vectorial parcialmente ordenado $\mathcal{P}_M$. Hay un elemento especial no-cero $\boxslash \in \mathcal{P}_M$, llamado la **operación nul**.

Composición de interfaces

Interfaces que conectan a la misma operación pueden ser compuestos arbitrariamente, denotamos: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_n$.



Induce un mapeo:
$\mathcal{B}_{\Sigma_1} \times \mathcal{B}_{\Sigma_2} \times \cdots \times \mathcal{B}_{\Sigma_n} \to \mathcal{B}_{\Sigma}$

Axiomatización – parte II

Hay un mapeo $\partial : \Gamma \to \Xi$ que asigna para un tipo de operación el tipo de interfaz correspondiente.

P.II

Sea $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_n$ una descomposición de interfaces. Entonces existe un isomorfísmo $\tau : \mathcal{B}_{\Sigma_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\Sigma_n} \to \mathcal{B}_\Sigma$ de espacios vectoriales que además es positivo.

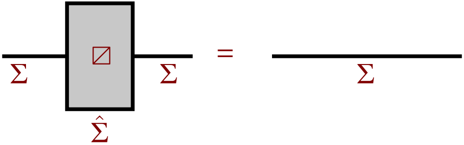
P.IO

Para cada tipo $M \in \Gamma$ de operación hay un mapeo blineal y positivo $[\![\cdot, \cdot]\!]_M : \mathcal{P}_M \times \mathcal{B}_{\partial M} \to \mathbb{R}$.

Producto interior

Para cualquier tipo Σ de **interface** postulamos un tipo $\hat{\Sigma}$ de operación tal que

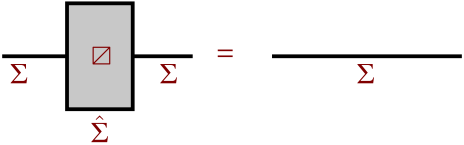
- $\partial\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \Sigma$
- la **operación nul** "pasa la señal":



Producto interior

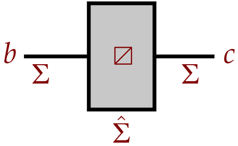
Para cualquier tipo Σ de **interface** postulamos un tipo $\hat{\Sigma}$ de operación tal que

- $\partial\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \Sigma$
- la **operación nul** “pasa la señal”:



Poniendo elementos de $\mathcal{B}_\Sigma$ de los dos lados permite evaluar. Esto define un **producto interior** $\mathcal{B}_\Sigma \times \mathcal{B}_\Sigma \to \mathbb{R}$.

$$(\!|b, c|\!)_\Sigma := [\![\boxslash, b \otimes c]\!]_{\hat{\Sigma}}$$



Esto debe de ser **simétrico** y **positivo-definido**.

Composición de operaciones

Dado una base orthonormal $\{\xi_k\}_{k\in I}$ de $\mathcal{B}_\Sigma$ tenemos la relación de completitúd:

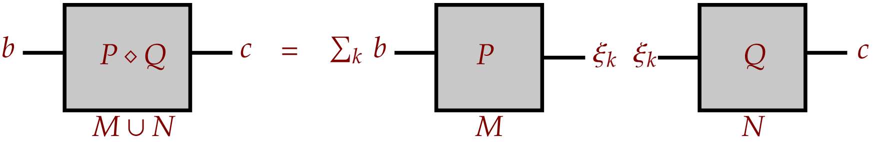
$$(\!|b, c|\!) = \sum_{k\in I} (\!|b, \xi_k|\!)(\!|\xi_k, c|\!) \quad \text{o} \quad [\![\boxslash, b \otimes c]\!] = \sum_{k\in I} [\![\boxslash, b \otimes \xi_k]\!][\![\boxslash, \xi_k \otimes c]\!]$$

Composición de operaciones

Dado una base orthonormal $\{\xi_k\}_{k\in I}$ de $\mathcal{B}_\Sigma$ tenemos la relación de completitúd:

$$\llparenthesis b, c \rrparenthesis = \sum_{k\in I} \llparenthesis b, \xi_k \rrparenthesis \llparenthesis \xi_k, c \rrparenthesis \quad \text{o} \quad \llbracket \boxslash, b\otimes c \rrbracket = \sum_{k\in I} \llbracket \boxslash, b\otimes \xi_k \rrbracket \llbracket \boxslash, \xi_k \otimes c \rrbracket$$

Como generalización obtenemos la **regla de composición de operaciones**.



$$\llbracket P \diamond Q, b\otimes c \rrbracket_{M\cup N} = \sum_{k\in I} \llbracket P, b\otimes \xi_k \rrbracket_M \llbracket Q, \xi_k \otimes c \rrbracket_N$$

Axiomatización – parte III

P.I2

Sea Σ un tipo de interface y $\hat{\Sigma}$ el tipo de operación asociado. Entonces $(\!|b, c|\!)_\Sigma := [\![\boxslash, b \otimes c]\!]_{\hat{\Sigma}}$ define un producto interior simétrico y positivo-definido en $\mathcal{B}_\Sigma$.

P.OO

Sean M, N tipos de operación que se pueden componer como $M \cup N$. Sean $P \in \mathcal{P}_M$ y $Q \in \mathcal{P}_N$. Entonces,

$$[\![P \diamond Q, b \otimes c]\!]_{M \cup N} \quad = \quad \sum_{k \in I} [\![P, b \otimes \xi_k]\!]_M \, [\![Q, \xi_k \otimes c]\!]_N.$$

Modelos

Un modelo

es un conjunto de datos que satisfacen el sistema de axiomas.

En nuestro caso un modelo contiene el conjunto Γ de tipos de operaciones, el conjunto Ξ de tipos de interfaces, un mapeo $\partial : \Gamma \to \Xi$, una noción de composición de tipos de interfaces y tipos de operaciones. También contiene los espacios vectoriales parcialmente ordenados $\mathcal{B}_\Sigma$ para $\Sigma \in \Xi$, $\mathcal{P}_M$ para $M \in \Gamma$, los mapeos τ, los mapeos $[\![\cdot, \cdot]\!]$ etc., todo satisfaciendo los axiomas.

Una teoría física

es un modelo junto con una asignación entre situaciones físicas y datos del modelo.

¿Como evaluar a un diagrama?