

**Dos Enfoques**  
**a la Fórmula de Black y Scholes**

**Tesis de Maestría presentada por**

**Luis Adrián Martínez Pérez**

**Dirigida por**

**Eugenio P. Balanzario**

# Índice Analítico

## Capítulo 1

### Preliminares

§1. Introducción .....	1
------------------------	---

## Capítulo 2

### El Teorema de DeMoivre-Laplace

§1. Introducción .....	3
§2. Lemas Preliminares .....	3
§3. Demostración del Teorema 1 .....	7
§4. Una Cota Superior .....	8

## Capítulo 3

### El Modelo CRR

§1. Introducción .....	10
§2. Modelo Binomial .....	11
§3. Esperanza Condicional .....	15
§4. Precio de una Opción .....	16
§5. Demostración del Teorema 19 .....	22
§6. Demostración del Corolario 22 .....	29

## Capítulo 4

### La Ecuación Diferencial de Black y Scholes

§1. Introducción .....	30
§2. El Movimiento Browniano .....	30
§3. La ecuación de Black y Scholes .....	33
§4. Solución Mediante la Transformada de Mellin .....	37

<b>Referencias</b> .....	44
--------------------------	----

# Capítulo 1

## Preliminares

### §1. Introducción.

Una acción de una empresa es como una rebanada de pastel. Cuando se compra una acción de una compañía, se posee una porción de la misma. La venta de acciones por parte de una compañía es una forma de financiar sus actividades productivas. Por otra parte, el que compra una acción piensa en obtener una ganancia monetaria. Usualmente, esta ganancia es debida a la diferencia entre el precio de compra (bajo) y el precio de venta (alto).

Denotamos mediante  $S(t)$  el precio de una acción al tiempo  $t$ . Sea  $t_1 < t_2$ . En 1900, el matemático francés L. Bachelier afirmó que el precio  $S(t)$  satisface

$$(1) \quad \mathbf{P} \left\{ \frac{S(t_2) - S(t_1)}{\sigma \sqrt{t_2 - t_1}} \in [a, b] \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

para cualesquiera números reales  $a$  y  $b$ , y en donde  $\sigma > 0$  es una constante que depende de la acción considerada. Bachelier afirmó además que (1) se cumple independientemente del valor de  $S(t)$  para cada  $t < t_1$ .

El trabajo de Bachelier tuvo un impacto importante en la comunidad matemática. En particular, bajo la influencia de la tesis de Bachelier y de la investigación de A. Einstein sobre el movimiento browniano, se desarrolló la teoría moderna de la probabilidad. A mitad del siglo XX, el matemático K. Itô pudo concebir una teoría de integración estocástica, así como una teoría de ecuaciones diferenciales con términos aleatorios.

Por otra parte, el trabajo de Bachelier hizo sentir su influencia en la comunidad de economistas en la década 1960-1970, como consecuencia de los trabajos de P. Samuelson, R.C. Merton y C. Sprenkle. Con los recursos técnicos desarrollados por Itô, finalmente en 1973, F. Black, M. Scholes y R.C. Merton obtuvieron una fórmula satisfactoria para el precio de una opción en los mercados financieros.

**Definición 2.** Cuando se adquiere una opción de compra al tiempo 0 se adquiere el derecho, pero no la obligación, de comprar una acción al tiempo  $T$  por el precio  $K$ . Decimos que  $T$  es el tiempo de maduración de la opción y que  $K$  es el precio de ejercicio.  $\square$

**Ejemplo 3.** Suponga por ejemplo, que el precio de una acción hoy es de 50 pesos y que nosotros adquirimos una opción para la compra dentro de 6 meses ( $T = 6$  meses), de una acción por 55 pesos ( $K = 55$ ). Si a la fecha del vencimiento de la opción, el precio de la acción subió hasta 60, entonces nosotros podemos ejercer el derecho que confiere la opción y comprar a 55, generando así una ganancia de  $5 = 60 - 55$  pesos.  $\square$

La introducción de las opciones en los mercados financieros tiene por objeto de funcionar como seguros contra cambios grandes de los precios de las acciones (y de otros activos). En el siguiente ejemplo se considera una opción de venta.

**Ejemplo 4.** Considere el caso del dueño de una acción que recientemente ha incrementado mucho su valor. Suponga que el inversor está interesado en conservar su acción, pero teme una caída de precios. En este caso, el inversor se puede asegurar comprando una opción de venta, es decir una opción que le dé el derecho, pero no la obligación, de vender su acción a un precio previamente fijado.  $\square$

Black y Scholes propusieron (ver [2]) la siguiente fórmula para el precio al tiempo 0, de una opción para la compra de una acción al tiempo  $T$  por el precio  $K$ ,

$$(5) \quad \text{precio de opción} = s_0 N(d_1) - \frac{N(d_2)}{e^{rT}} K$$

en donde  $s_0$  es el precio de la acción al tiempo 0,  $r$  es la tasa de interés bancaria,  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log\left(\frac{s_0}{K}\right) + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T} \quad \text{y} \quad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

En 1979, J. Cox, S.A. Ross y M. Rubinstein [4] desarrollaron un modelo muy simple para deducir la fórmula de Black y Scholes. En particular, el modelo CRR no utiliza la relativamente complicada teoría de Itô de la integración estocástica. El modelo CRR también es conocido por Modelo Binomial.

## Capítulo 2

### El Teorema de DeMoivre-Laplace

#### §1. Introducción.

Este capítulo está dedicado al Teorema de DeMoivre-Laplace, que es quizá la versión más simple del Teorema Central del Límite. Nuestro tratamiento del Teorema de DeMoivre-Laplace se distingue de otros modos de abordar el teorema en dos aspectos. Primero, hemos enunciado el teorema en términos de la esperanza matemática de una función  $f$ . El caso clásico corresponde al caso de que  $f$  es la función indicadora de un intervalo. Por otro lado, también se ha estimado la razón de convergencia hacia la distribución normal.

**Teorema 1. (DeMoivre-Laplace).** *Sea  $0 < p < 1$ . Sea  $q = 1 - p$ . Sea  $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$  una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas tales que*

$$\mathbf{P}\{X_1 = 1\} = p \quad \text{y además} \quad \mathbf{P}\{X_1 = 0\} = q.$$

*Sea  $\xi_n = X_1 + \cdots + X_n$ . Sea  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función acotada, Lipschitz continua y que se anula fuera de un intervalo compacto. Entonces*

$$\mathbf{E} \left[ f \left( \frac{\xi_n - pn}{\sqrt{npq}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + O \left[ \frac{\log^{\frac{3}{2}} n}{\sqrt{n}} \right].$$

#### §2. Lemas Preliminares.

Para la demostración del Teorema 1 procedemos como en Lesigne [6], en donde se puede encontrar por ejemplo, la prueba del siguiente lema.

**Lema 2. (J. Stirling).** *Para  $n \rightarrow \infty$ , se cumple que*

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n \left\{ 1 + O \left( \frac{1}{n} \right) \right\}.$$

**Lema 3.** Sea  $a > 1$ . Sea  $0 < p < 1$  y sea  $q = 1 - p$ . Para cada  $k$  tal que  $|k - np| < a\sqrt{n}$ , se cumple que

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqn}} \exp\left\{-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right\} \left[1 + O\left(\frac{a^3}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

La constante implicada en el símbolo  $O$  no depende de  $k$  pero sí de  $p$ .

**Demostración.** Por el Lema 2,

$$\frac{n! p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \frac{1 + \epsilon_n}{(1 + \epsilon_k)(1 + \epsilon_{n-k})}.$$

Puesto que  $|k - np| < a\sqrt{n}$ , entonces

$$\frac{1}{(np + a\sqrt{n})(nq + a\sqrt{n})} \leq \frac{1}{k(n-k)} \leq \frac{1}{(np - a\sqrt{n})(nq - a\sqrt{n})}.$$

y por lo tanto

$$\frac{n}{k(n-k)} = \frac{1}{npq} \left\{1 + O\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right\}.$$

También se cumple que (la serie de Taylor de la función raíz cuadrada)

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{1}{npq}} \left\{1 + O\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right\}.$$

Por otro lado

$$\log\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} = k \log\left\{1 - \frac{k - np}{k}\right\} + (n-k) \log\left\{1 + \frac{k - np}{n-k}\right\}.$$

Puesto que  $|k - np| < a\sqrt{n}$ , entonces se obtiene

$$-\frac{1}{2}(k - np)^2 \left\{\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right\} + O(a^3 k n^{-\frac{3}{2}}) + O(a^3 (n-k) n^{-\frac{3}{2}}).$$

En efecto, se cumple que  $np/2 \leq np - a\sqrt{n} \leq k$  siempre que  $n$  sea suficientemente grande. Por lo tanto

$$\left(\frac{k - np}{k}\right)^3 \leq \left(\frac{2a\sqrt{n}}{np}\right)^3 = O(a^3 n^{-\frac{3}{2}}).$$

Puesto que  $k$  y  $n - k$  son ambos menores o iguales que  $n$ , entonces lo anterior es

$$-\frac{1}{2}(k - np)^2 \frac{1}{npq} + O\left(\frac{a^3}{\sqrt{n}}\right).$$

Tomando exponencial

$$\exp\left\{-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right\} \left[1 + O\left(\frac{a^3}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Puesto que existen constantes  $c_1, \dots, c_5$  tales que

$$\epsilon_n < \frac{c_1}{n}, \quad \epsilon_k < \frac{c_2}{k}, \quad \epsilon_{n-k} < \frac{c_3}{n-k}, \quad \frac{1}{k} < \frac{c_4}{n}, \quad \frac{1}{n-k} < \frac{c_5}{n}$$

entonces

$$\frac{1 + \epsilon_n}{(1 + \epsilon_k)(1 + \epsilon_{n-k})} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Esto termina la prueba. ■

**Lema 4.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y que se anula fuera de  $[a, b]$ . Suponga que existe una constante  $A > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < A|x - y|$  para cada  $x, y$  tales que  $[x, y] \subset [a, b]$ . Sea  $M = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$ . Para cada  $t \in \mathbf{R}$  se cumple que

$$h \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(t + kh) = \int_a^b f(x) dx + O(h(M + b - a))$$

en donde la constante implicada en el símbolo  $O$  no depende de  $t$ .

**Demostración.** Es fácil ver que

$$h \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(t + kh) - h \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + xh) dx \leq h \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_k^{k+1} |f(t + kh) - f(t + xh)| dx$$

es menor o igual que

$$h\left(4M + h \text{Card}\{k : a \leq t + kh \leq b\}\right) \leq 4Mh + h(b - a). \quad \blacksquare$$

El siguiente Lema 6 se conoce como la Estimación para las Grandes Desviaciones. Antes será necesario un lema.

**Lema 5. (A. Markov).** Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{N}_0$  una variable aleatoria con valores en el conjunto de enteros no negativos  $\mathbf{N}_0$ . Sea  $a$  un número real positivo. Entonces

$$\mathbf{P}\{X \geq a\} \leq \frac{1}{a} \mathbf{E}(X).$$

**Demostración.** Sea  $p_j = \mathbf{P}(X = j)$ . Entonces

$$\mathbf{P}\{X \geq a\} = \sum_{a \leq j} p_j \leq \sum_{a \leq j} \frac{j}{a} p_j \leq \frac{1}{a} \mathbf{E}(X). \blacksquare$$

**Lema 6.** Sea  $0 < p < 1$  y sea  $q = 1 - p$ . Sea  $0 < \epsilon < q$ . Sea

$$h_+(\epsilon) = (p + \epsilon) \log \frac{p + \epsilon}{p} + (q - \epsilon) \log \frac{q - \epsilon}{q}.$$

Sea  $h_-(\epsilon) = h_+(-\epsilon)$ . Sea  $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$  una sucesión como la del Teorema 1. Sea  $\xi_n = X_1 + \dots + X_n$ . Entonces

$$(a) \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\xi_n \geq p + \epsilon\right\} \leq \exp\{-nh_+(\epsilon)\}.$$

$$(b) \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\xi_n \leq p - \epsilon\right\} \leq \exp\{-nh_-(\epsilon)\}.$$

$$(c) \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\xi_n - p\right| \geq \epsilon\right\} \leq \exp\{-nh_+(\epsilon)\} + \exp\{-nh_-(\epsilon)\}.$$

**Demostración.** Probaremos sólo la primera afirmación. Sea  $t > 0$  un número fijo. Entonces

$$\frac{1}{n}\xi_n \geq p + \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \exp\{t(\xi_n - np - n\epsilon)\} \geq 1.$$

El Lema 6 implica que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\xi_n \geq p + \epsilon\right\} &\leq \mathbf{E}\left[e^{t(\xi_n - n(p+\epsilon))}\right] \\
 &= e^{-nt(p+\epsilon)} \mathbf{E}(e^{t\xi_n}) \\
 &= e^{-nt(p+\epsilon)} \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
 &= e^{-nt(p+\epsilon)} (q + pe^t)^n \\
 &= \exp\left[-n\{t(p+\epsilon) - \log(q + pe^t)\}\right].
 \end{aligned}$$

Es suficiente notar que  $t(p + \epsilon) - \log(q + pe^t)$  alcanza un máximo en

$$t = \log\left\{\frac{q(p + \epsilon)}{p(q - \epsilon)}\right\}. \blacksquare$$

### §3. Demostración del Teorema 1.

Para la demostración del Teorema 1, sea  $K > 0$  un número real positivo. Consideremos la suma

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k - pn}{\sqrt{npq}}\right) \mathbf{P}\left\{\sum_{j=1}^n X_j = k\right\} =: \sigma_1 + \sigma_2$$

en donde  $\sigma_1$  es sobre aquellos números  $k$  que cumplen  $|k - np| < Kn^{\frac{1}{2}}$  y  $\sigma_2$  es sobre  $|k - np| \geq Kn^{\frac{1}{2}}$ . Puesto que

$$h_{\pm}(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2pq} + O(\epsilon^3)$$

entonces, el Lema 6, con

$$(7) \quad \epsilon = K\sqrt{\frac{2pq}{n}} \quad \text{implica que} \quad \sigma_2 = O(\exp\{-K^2\}).$$

Como  $\sigma_1$  es una suma sobre  $|k - np| < K\sqrt{n}$ , entonces (ver Lema 3)

$$\sigma_1 = \left[1 + O\left(\frac{K^3}{\sqrt{n}}\right)\right] \sum_k f\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \frac{e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi pqn}}.$$

El Lema 4, con  $h = 1/\sqrt{npq}$  y con  $t = -\sqrt{np/q}$ , implica que

$$\sigma_1 = \left\{1 + O\left(\frac{K^3}{\sqrt{n}}\right)\right\} \left[ \int_{-K/\sqrt{pq}}^{+K/\sqrt{pq}} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + O\left(\frac{K}{\sqrt{n}}\right) \right].$$

Por lo tanto

$$\mathbf{E} \left[ f\left(\frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}}\right) \right] = \int_{-K/\sqrt{pq}}^{+K/\sqrt{pq}} f(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} dx + O\left\{e^{-K^2}\right\} + O\left\{\frac{K^3}{\sqrt{n}}\right\}.$$

El Teorema 1 se sigue ahora al poner  $K^2 = \log n$ .

#### §4. Una Cota Superior.

En esta sección se enuncia y demuestra la siguiente proposición que será utilizada en el Capítulo 3.

**Proposición 8.** *Dado  $p \in (0, 1)$  constante, existe  $\lambda_0 > 0$  tal que*

$$\binom{n}{k} q^n \left(\frac{p}{q}\right)^k \ll \sqrt{n} \exp\left\{-\lambda_0 \left(\frac{k - np}{\sqrt{pqn}}\right)^2\right\}$$

para cada  $k$  tal que  $0 < k < n$ .

**Demostración.** Consideremos la representación de las probabilidades binomiales

$$\binom{n}{k} q^n \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{e^R}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

en donde  $|R| \leq \frac{1}{12} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right)$ . Ver página 242 de Parzen [7]. Por lo tanto

$$\binom{n}{k} q^n \left( \frac{p}{q} \right)^k \ll \sqrt{n} \left\{ F\left(\frac{x}{n}\right) \right\}^n \quad \text{en donde} \quad F(x) = \left( \frac{p}{x} \right)^x \left( \frac{1-p}{1-x} \right)^{1-x}.$$

Ahora bien  $F'(x) = 0$  si y sólo si

$$\log \frac{p}{x} = \log \frac{1-p}{1-x}.$$

Por lo tanto  $F$  alcanza su máximo en  $x = p$ . Por otro lado  $F(p) = 1$ . Más aún, la serie de Taylor de  $F(x)$  en  $x = p$  es

$$1 - \frac{1}{2} \frac{(x-p)^2}{pq} + \frac{1-2p}{6p^2q^2} (x-p)^3 + \dots$$

Ahora es una tarea fácil seleccionar  $\lambda_0 > 0$  tal que

$$F(x) \ll \exp \left\{ -\lambda_0 \left( \frac{x-p}{\sqrt{pq}} \right)^2 \right\}$$

para cada  $x \in (0, 1)$ . ■

El interés de la Proposición 8 yace en el hecho de que la cota superior vale para toda  $k$  excepto por  $k = 0$  y  $k = n$ , mientras que el Lema 3 vale sólo para aquellas  $k$  tales que  $|k - np| < a\sqrt{n}$ . Por otro lado, los términos correspondientes a  $k = 0$  y  $k = n$  son exponencialmente pequeños siempre que  $0 < p < 1$ .

## Capítulo 3

### El Modelo CRR

#### §1. Introducción.

El problema que abordamos aquí es el de dar una fórmula para el precio de una opción para la compra o venta de una acción. Mediante  $T$  se denotará el tiempo de maduración de la opción. La idea fundamental, será la de construir un portafolio dinámico, que deberá sostenerse para todo tiempo  $t \in [0, T]$ . Para cada  $0 \leq t \leq T$ , el precio de la opción será el precio del portafolio. Como veremos más adelante, un portafolio es un conjunto de activos financieros. En nuestro caso, consideraremos sólo dos activos.

- (a) Una cuenta bancaria que produce intereses de manera continua.
- (b) También se invertirá en la compra de acciones.

El portafolio que se propone para valorar la opción es dinámico porque su composición cambia con el tiempo, de acuerdo a la evolución del precio de la acción.

Al tiempo de maduración  $T$ , el precio del portafolio será igual a la ganancia que la compra de la opción le genera a su tenedor. Ver el Ejemplo 3 del Capítulo 1. Al tiempo 0, el que vende la opción recibe justo el monto necesario para armar un portafolio dinámico, que al tiempo  $T$  reproduce exactamente la ganancia del tenedor de la opción.

Citando a R.A. Jarrow [5] podemos decir que “la idea de construir el portafolio dinámico es la clave en el enfoque de Black, Scholes y Merton, más importante aún que la fórmula de valuación misma”.

Nos referiremos al que vende la opción como al emisor de la opción. Debe notarse que el emisor de la opción para la compra de una acción con  $K$  como precio de ejercicio, adquiere la obligación de vender al tenedor de la opción, una acción al tiempo de maduración por  $K$  pesos.

**Ejemplo 1.** Esta es la continuación del Ejemplo 3, Capítulo 1. Al tiempo 0, el emisor de la opción invirtió el monto recibido en la armadura de un portafolio dinámico. Al tiempo de vencimiento  $T$ , el portafolio dinámico dará una ganancia de 5 pesos, que es la ganancia de tenedor de la opción.

Como el precio de ejercicio es  $K = 55$ , entonces es posible comprar al precio del mercado, es decir, a 60 pesos. Esto es,

$$\underbrace{60}_{\substack{\text{precio en} \\ \text{el mercado}}} = \underbrace{5}_{\substack{\text{lo que genera} \\ \text{el portafolio}}} + \underbrace{55}_{\substack{\text{precio} \\ \text{de ejercicio}}}.$$

Por lo tanto, el emisor de la opción puede hacer frente a su obligación de vender a 55 pesos, y al mismo tiempo, el tenedor de la opción puede hacer valer su derecho de comprar a 55 pesos.  $\square$

## §2. Modelo Binomial.

Sea dado  $T$ , que es el tiempo de maduración de una opción. Sea  $n$  un entero positivo. Supondremos que todas las transacciones financieras ocurren en los tiempos

$$j\delta \quad \text{con} \quad 0 \leq j \leq n \quad \text{en donde} \quad \delta = \frac{T}{n}.$$

Por lo tanto, hay exactamente  $n + 1$  tiempos en donde se puede comprar y vender acciones y opciones, así como hacer depósitos (o retiros) en una cuenta bancaria.

Usaremos la expresión  $\delta j$  para aproximar a  $t$ , en donde  $t \in [0, T]$  es un valor constante. Para el precio de una acción al tiempo  $t$ , escribiremos  $S_j$  en lugar de  $S(t)$ .

**Lema 2.** Para cada  $0 \leq t \leq T$  fija, sea

$$j = \max \{k \in \mathbf{N} : \delta k \leq t\} \quad \text{de modo que} \quad j = \left[ \frac{t}{T} n \right].$$

Entonces  $\delta j = t + O(\delta)$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

Si el tiempo presente corresponde a  $t_0$  y además  $t_0 < t$ , entonces  $S(t)$  es aleatoria, pero  $S(t_0)$  ya no es aleatoria, pues su valor es conocido al tiempo presente  $t_0$ . Escribiremos  $S(t)$ , con mayúscula, siempre que se trate de una variable aleatoria. Por otra lado, escribiremos  $s(t)$ , con minúscula, para denotar el precio ya conocido al tiempo  $t$  de una acción. De la misma manera, escribiremos  $s_j$ , o bien  $S_j$ , de acuerdo a si el precio de la acción

es ya conocido al tiempo  $t = \delta j$ , o es todavía desconocido y por tanto aleatorio.

Supondremos que existen dos números reales positivos  $d < u$  tales que

$$\mathbf{P}\{S_{j+1} = uS_j\} = p \quad \text{y} \quad \mathbf{P}\{S_{j+1} = dS_j\} = q$$

en donde  $0 < p < 1$  y además  $q = 1 - p$ . Los números  $d, u, p$  son parámetros libres en nuestro modelo.

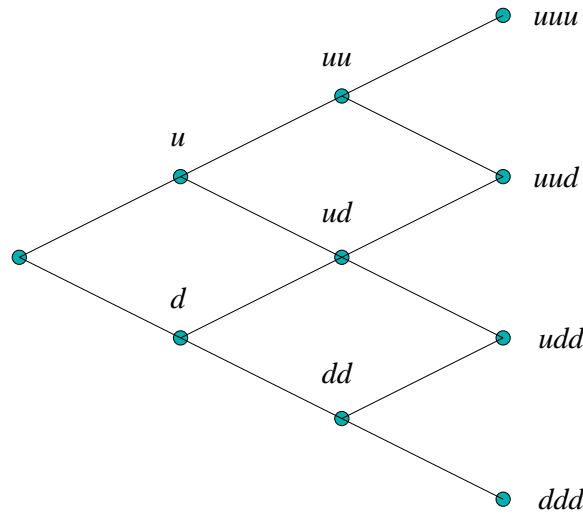


Figura 1.

Al tiempo  $j = 0$  el precio  $s_0$  de la acción es conocido. Al tiempo  $j = 1$ , sólo existen dos posibilidades para el precio  $S_1$  de la acción

$$S_1 = \begin{cases} us_0 & \text{con probabilidad } p, \\ ds_0 & \text{con probabilidad } q. \end{cases}$$

Al tiempo  $j = 2$ , existen tres posibles valores que  $S_2$  puede tomar

$$S_2 = \begin{cases} u^2s_0 & \text{con probabilidad } p^2, \\ ups_0 & \text{con probabilidad } 2pq, \\ d^2s_0 & \text{con probabilidad } q^2. \end{cases}$$

En general,  $S_j$  puede tomar los  $j + 1$  valores

$$S_j(\ell) = d^j \left(\frac{u}{d}\right)^\ell s_0 \quad \text{con probabilidad} \quad \binom{j}{\ell} q^\ell \left(\frac{p}{q}\right)^{j-\ell}$$

y en donde  $0 \leq \ell \leq j$ . En otras palabras,  $S_j$  tiene una distribución de probabilidad Binomial con parámetros  $j$  y  $p$ . Ver la Figura 1, en donde se ha puesto  $s_0 = 1$ .

Sea  $r$  la tasa de interés bancaria, de modo que si se depositan hoy  $x$  pesos en el banco, después de un tiempo  $t$ , se podrán extraer  $x e^{rt}$  pesos del banco. Escribiremos

$$(3) \quad \varrho = e^{r\delta} \quad \text{en donde, como antes,} \quad \delta = \frac{T}{n}.$$

En lugar de la sucesión de variables  $\{S_j\}$ , es conveniente considerar las variables

$$(4) \quad \xi_j = \frac{S_j}{\varrho^j} \quad \text{para} \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Nótese que  $\xi_0 = s_0$ . La conveniencia de trabajar con  $\{\xi_j\}$  en lugar de  $\{S_j\}$  es que  $\xi_j$  representa el valor descontado de la acción. Por lo tanto se puede comparar  $\xi_j$  con  $\xi_k$ , para  $j \neq k$ , ya que ambas están medidas en unidades monetarias homogéneas. En efecto,  $x$  pesos hoy “valen” lo mismo que  $\varrho^j x$  pesos  $t = j\delta$  unidades de tiempo más adelante. Los valores que toma la sucesión  $\{\xi_j\}$ , son

$$(5) \quad \xi_j(\ell) = \left(\frac{d}{\varrho}\right)^j \left(\frac{u}{d}\right)^\ell s_0 \quad \text{para} \quad 0 \leq j \leq n \quad \text{y} \quad 0 \leq \ell \leq j.$$

Hasta aquí tenemos tres parámetros libres en el modelo binomial, a saber:  $d$ ,  $u$  y  $p$ . Con objeto de dar al modelo binomial una rica estructura matemática vamos ahora a imponer restricciones sobre estos parámetros. Así entonces haremos que el modelo binomial sea una martingala.

**Definición 6.** Sea  $q = 1 - p$  y sea  $p$  tal que

$$\varrho \xi_j(\ell) = p \xi_{j+1}(\ell + 1) + q \xi_{j+1}(\ell) \quad \text{para} \quad 0 \leq j < n \quad \text{y} \quad 0 \leq \ell \leq j.$$

Entonces decimos que la sucesión  $\{\xi_j\}$  es una martingala.  $\square$

**Proposición 7.** Una condición necesaria y suficiente para que  $\{\xi_j\}$  sea una martingala es que

$$p = \frac{\varrho - d}{u - d}.$$

**Demostración.** En efecto, la condición para ser martingala equivale a

$$\varrho = pu + (1 - p)d.$$

Ahora sólo resta despejar el valor de  $p$ . ■

Sea  $j < k$ . Podemos aprovechar el hecho de que la sucesión  $\{\xi_j\}$  es una martingala para expresar los valores de  $\xi_j$  en términos de los valores de  $\xi_k$ . Será necesario un lema auxiliar.

**Lema 8.** Sea  $\{A_j\}_{j=0}^n$  un conjunto de  $n + 1$  números. Sean  $0 < p < 1$  y  $q = 1 - p$ . Para cada  $0 \leq j \leq n - 1$  sea  $\alpha_j = pA_{j+1} + qA_j$ . Entonces

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} q^{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^j \alpha_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^n \left(\frac{p}{q}\right)^j A_j.$$

Note el lector que una consecuencia de la siguiente Proposición 9 es que, para cada  $0 \leq j < n$  y cada  $0 \leq \ell \leq j$ , los valores  $\xi_j(\ell)$  están completamente determinados por los valores  $\xi_n(\ell)$  en donde  $0 \leq \ell \leq n$ .

**Proposición 9.** Las dos condiciones siguientes son equivalentes.

(a) Para cualesquiera índices  $j, k$  tales que  $0 \leq j < k \leq n$ , se cumple

$$\xi_j(\ell) = q^{k-j} \sum_{i=0}^{k-j} \binom{k-j}{i} \left(\frac{p}{q}\right)^i \xi_k(\ell + i).$$

(b) La sucesión  $\{\xi_j\}$  es como en la Definición 6.

**Demostración.** Tomando  $k = j + 1$ , vemos que (a) implica (b). Para ver que (b) implica (a), sólo basta aplicar el Lema 6 reiteradamente. ■

### §3. Esperanza Condicional

En el apartado anterior hemos construido una sucesión finita de variables aleatorias  $\xi_j : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , con  $0 \leq j \leq n$ , en donde el espacio muestral  $\Omega$  consiste en el conjunto de todas las  $n$ -adas que son como la siguiente

$$(10) \quad \omega = (u, d, d, \dots, u).$$

En el caso concreto de que  $n = 2$ , tenemos

$$\Omega = \{(u, u), (u, d), (d, u), (d, d)\}.$$

Nótese por ejemplo que

$$\text{si } \omega = (u, d) \quad \text{entonces} \quad \xi_1(\omega) = \frac{u}{\rho} \xi_0 \quad \text{y además} \quad \xi_2(\omega) = \frac{ud}{\rho^2} \xi_0.$$

Podemos imaginar que  $\Omega$  es una urna que contiene un total de  $2^n$  pedazos de papel  $\omega$  que son como en (10). Después de que la urna  $\Omega$  se ha revuelto muy bien se extrae uno de los  $2^n$  papeles  $\omega$  contenidos en  $\Omega$ . En este momento, la urna  $\Omega$  sale fuera de escena y sólo permanece el papel seleccionado  $\omega$ . Cuando el tiempo  $j = 1$  se ha cumplido, entonces se anuncia la primera entrada de  $\omega$ , y así es posible conocer el valor de  $S_1$  y de  $\xi_1$ . Cuando el tiempo  $j = 2$  se cumple, entonces se anuncia la segunda entrada de  $\omega$ . Por lo tanto, cuando  $j = 2$ , entonces se conocen la primera y segunda entradas de  $\omega$  pero se desconocen todas las demás. Por lo tanto, al tiempo  $j = 2$  es posible conocer el valor de  $S_2$  y de  $\xi_2$ .

En general, el valor de  $\xi_j$  está determinado por las primeras  $j$  entradas de  $\omega$ . No importa cómo son las entradas  $j + 1$  hasta  $n$  de  $\omega$ . El valor de  $\xi_j$  se conoce sólo al tiempo  $j$  y no antes. Esta observación es importante en relación al Teorema 25 que probaremos más adelante.

Mediante  $\Omega_j$  se denota la información desplegada hasta el momento  $j$ . Si entre las primeras  $j$  entradas de  $\omega$ , aparece el símbolo “ $u$ ” exactamente  $\ell$  veces, entonces

$$S_j = d^j \left(\frac{u}{d}\right)^\ell s_0 \quad \text{o bien} \quad \xi_j = \left(\frac{d}{\rho}\right)^j \left(\frac{u}{d}\right)^\ell \xi_0.$$

Así pues, lo que nos interesa de  $\Omega_j$  es el número de veces que aparece el símbolo “ $u$ ” entre las entradas 1 hasta  $j$  de cada elemento  $\omega$  del espacio muestral  $\Omega$ .

Por la expresión (5), el par  $(j, \ell)$  determina completamente el valor de la variable aleatoria  $\xi_j$ . Por lo tanto podemos escribir

$$(11) \quad \mathbf{E}(\xi_k | \xi_j) := q^{k-j} \sum_{i=0}^{k-j} \binom{k-j}{i} \left(\frac{p}{q}\right)^i \xi_k(\ell + i)$$

cuando  $j < k$ . Nosotros escribiremos  $\mathbf{E}(\xi_k | \Omega_j)$  en lugar de  $\mathbf{E}(\xi_k | \xi_j)$ . La parte (a) de la Proposición 9 afirma que  $\xi_j = \mathbf{E}(\xi_k | \Omega_j)$ .

**Definición 12.** El operador  $\mathbf{E}(\xi_k | \Omega_j)$  definido en (11) se llama la esperanza condicional de  $\xi_k$  dada la información hasta el tiempo  $j$ .  $\square$

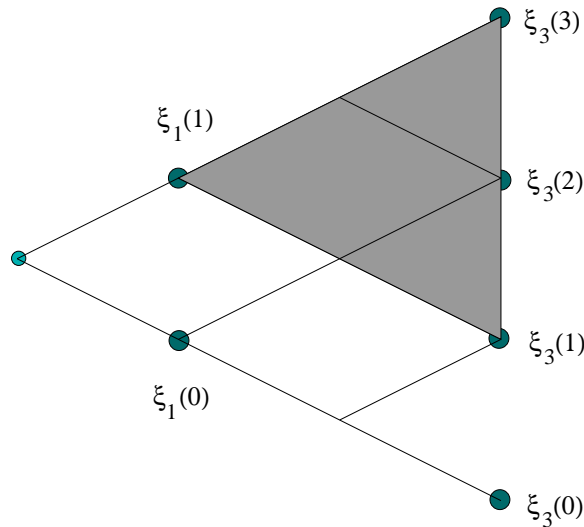


Figura 2.

En la Figura 2 se aprecia cómo  $\xi_1(1)$  está determinado por  $\xi_3(1)$ ,  $\xi_3(2)$  y  $\xi_3(3)$  pero no por  $\xi_3(0)$ . La Figura 2 corresponde al caso de que la primera entrada de la  $\omega$  seleccionada es una “u”.

#### §4. El Precio de una Opción.

En esta sección enunciamos el resultado principal de este capítulo. Antes será necesario precisar los conceptos de función de pago y de portafolio dinámico.

El que adquiere una opción de compra al tiempo 0, tiene el derecho pero no la obligación de comprar al tiempo  $T$ , una acción por  $K$  pesos, pero cuyo costo en el mercado de valores es igual a  $S(T) = S_n$ . Es claro que si  $S_n \leq K$ , entonces el dueño de la opción prefiere no ejercerla. Por otro lado, si  $S_n > K$ , entonces el dueño de la opción prefiere ejercerla y obtiene así una ganancia igual a  $S_n - K$ . Por lo tanto, la función de pago de una opción de compra está dada por

$$(13) \quad (S_n - K)^+ := \max \{S_n - K, 0\}.$$

Ver la parte (a) de la Figura 3. Nótese que la función de pago es una variable aleatoria, ya que depende del valor que tome la variable  $S_n$ , que también es aleatoria.

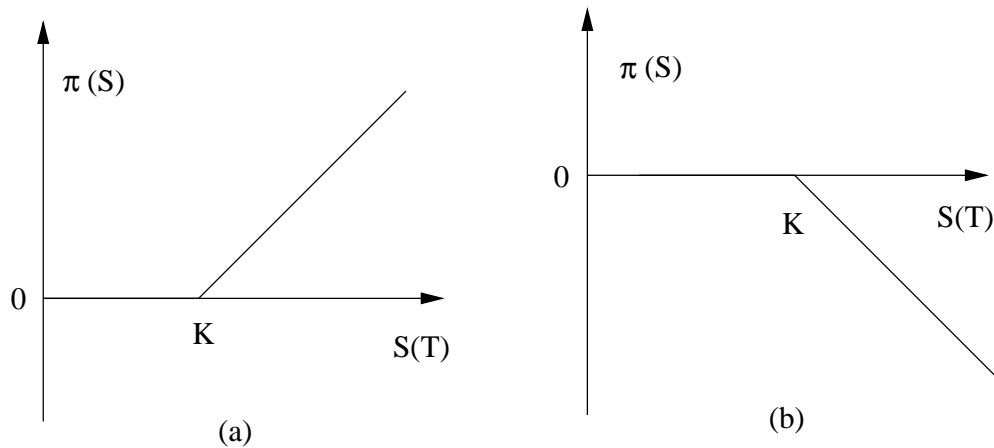


Figura 3.

De manera similar, el que adquiere una opción de venta al tiempo cero, tiene el derecho pero no la obligación, de vender al tiempo  $T$ , una acción por  $K$  pesos, pero cuyo costo en el mercado de valores es igual a  $S(T) = S_n$ . En caso de que  $S_n \geq K$ , entonces el dueño de la opción prefiere no ejercerla. En caso de que  $S_n < K$ , entonces el dueño de la opción prefiere ejercerla y obtiene así una ganancia igual a  $K - S_n$ . Por lo tanto la función de pago para una opción de venta está dada por

$$(14) \quad (K - S_n)^+.$$

Ver la parte (b) de la Figura 3.

Con objeto de cubrir, tanto el caso de una opción de compra como una opción de venta, consideraremos el caso general de una función de pago arbitraria  $\pi(x)$ . Supondremos que la función  $\pi$  satisface

$$(15) \quad \pi(x + \epsilon) = \pi(x) + O(\epsilon) \quad \text{y} \quad \pi(x) = O(x^\lambda).$$

para alguna  $\lambda > 0$  y cada  $x > 0$ . Es claro que tanto la función de pago de una opción de compra, como la de una opción de venta, satisfacen (15).

**Definición 16.** Para cada  $0 \leq t \leq T$ , sea

$$V(x, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi \left[ x \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} y \right\} \right] e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Nótese que  $V(x, t)$  depende de  $x$ ,  $t$ ,  $\sigma$ ,  $T$ ,  $r$  y de la función de pago  $\pi$ . Mediante  $r$  se denota la tasa de interés bancaria. La variable  $\sigma$  se llama la volatilidad de la acción y mide el grado de variabilidad del precio de la acción. Nótese también que podemos escribir

$$V(x, t) = e^{-r(T-t)} \mathbf{E} \left[ \pi \left( x \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma \sqrt{T-t} \mathcal{Z} \right\} \right) \right]$$

en donde  $\mathcal{Z}$  es una variable aleatoria normal Gaussiana con media cero y varianza uno.  $\square$

La expresión  $V(x, t)$  será el precio de una opción al tiempo  $t$ , que al tiempo  $T$  tiene a  $\pi$  como función de pago. La variable  $x$  tomará el lugar del precio de la acción subyacente, sobre la cual se emite la opción. La siguiente proposición nos dice que el valor de la opción al tiempo  $T$  es exactamente igual a la ganancia que la opción le produce a su tenedor.

**Proposición 17.** Para cada distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $\mathcal{Z}$ , se cumple que  $V(x, T) = \pi(x)$ .

**Demostración.** En efecto,  $V(x, T) = \mathbf{E}[\pi(xe^{0\mathcal{Z}})] = \mathbf{E}[\pi(x)] = \pi(x)$ .  $\blacksquare$

Para poder enunciar el resultado principal de este capítulo es necesaria la siguiente Definición 18. Debe entenderse que estamos considerando un

mercado un tanto reducido, ya que además de comprar y vender acciones y opciones, sólo se puede hacer depósitos y retiros del banco.

**Definición 18.** Por una estrategia de inversión se entiende una sucesión de números  $\Phi = \{\phi_{j+1} : 0 \leq j < n\}$ . Mediante el portafolio dinámico asociado a la estrategia  $\Phi$ , y con costos de armadura  $\Psi = \{p_j\}$ , se entiende la sucesión de pares ordenados

$$\Gamma(\Phi, \Psi) = \left\{ (\phi_{j+1}, p_j - \phi_{j+1}s_j) : 0 \leq j < n \right\}$$

en donde  $\phi_{j+1}$  representa la cantidad de acciones que el portafolio va a sostener durante el periodo de tiempo  $\delta j \leq t < \delta(j+1)$ . En la segunda coordenada del portafolio se indica la cantidad de dinero que se invierte en el banco.

Puesto que  $s_j$  es el precio de la acción al tiempo  $j$ , entonces el monto invertido en acciones es igual a  $\phi_{j+1}s_j$ . El precio del portafolio al tiempo  $j$  es igual al monto invertido en acciones más el monto invertido en el banco. Por lo tanto, el precio del portafolio al tiempo  $j$  es igual a  $p_j$ .

Diremos que  $p_j$  es el costo de armadura del portafolio al tiempo  $j$ .

Si el tiempo presente corresponde a  $j$ , entonces el portafolio tiene un costo de armadura, al tiempo  $j$ , igual a  $p_j$ . Es importante notar, sin embargo, que justo al terminar el periodo de tiempo  $\delta j \leq t < \delta(j+1)$ , el precio de la acción cambia a  $S_{j+1}$ . Por lo tanto el monto invertido en acciones tendrá un valor igual a  $\phi_{j+1}S_{j+1}$ . Por otro lado, el monto invertido en el banco, se habrá incrementado en la proporción  $\rho$ . Entonces el valor del portafolio, justo al terminar el periodo  $\delta j \leq t < \delta(j+1)$ , será igual a

$$\gamma_j(\Phi, \Psi) := \phi_{j+1}S_{j+1} + (p_j - \phi_{j+1}s_j)\rho.$$

Diremos que  $\gamma_j(\Phi, \Psi)$  es el precio después del ejercicio del portafolio  $\Gamma(\Phi, \Psi)$  correspondiente al tiempo  $j$ . Aquí termina la Definición 18.  $\square$

En el modelo binomial descrito en el §2 se cumple el siguiente teorema.

**Teorema 19. (Black-Scholes).** *Considere el caso de la venta al tiempo 0 de una opción que en el tiempo  $T$  produce una ganancia dada por la función de pago  $\pi$ . Se cumplen las siguientes cuatro afirmaciones.*

(a) Existe una estrategia de inversión  $\Phi$  y una sucesión de costos de armadura  $\Psi$  tal que el costo de armadura  $p_{j+1}$ , al tiempo  $j + 1$ , es igual al precio después del ejercicio al tiempo  $j$ , esto es,

$$\gamma_j(\Phi, \Psi) = p_{j+1}.$$

(b) Para los costos de armadura, se tiene que  $p_j = \mathbf{E}[\pi(S_n)|\Omega_j]/\varrho^{n-j}$ .

(c) Se cumple que  $p_n = \pi(S_n)$ .

(d) Cuando  $n \rightarrow \infty$  (y por lo tanto  $j \rightarrow \infty$  de tal forma que  $j\delta \rightarrow t$ ), se cumple que

$$p_j \rightarrow V(s(t), t)$$

en donde  $V(x, t)$  es como en la Definición 16.

Así entonces, el precio de la opción al tiempo  $j$  (o mejor aún, al tiempo  $t = j\delta$ ) es igual a  $p_j = \varrho^{-(n-j)} \mathbf{E}[\pi(S_n)|\Omega_j]$ . Esto es, el precio de la opción es igual al precio de armadura del portafolio al tiempo  $j$ . El precio  $p_j$  se puede calcular mediante la fórmula

(20)

$$p_j = \varrho^j \mathbf{E}\left[\frac{\pi(S_n)}{\varrho^n}|\Omega_j\right] = \left(\frac{q}{\varrho}\right)^n \left(\frac{\varrho}{q}\right)^j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} \left(\frac{p}{q}\right)^i \pi(S_n(\ell + i))$$

en donde  $\ell$  es tal que al tiempo  $t = j\delta$ , se cumple que  $(s(t) = s_j)$

(21) 
$$s(t) = d^j \left(\frac{u}{d}\right)^\ell s_0.$$

Nótese que la afirmación (c) del Teorema 19 se sigue de inmediato de la expresión (20) para  $p_j$  con  $j = n$ . Ver también la Proposición 17.

**Corolario 22.** Considere el caso de una opción para la compra de una acción con  $K$  como precio de ejercicio y con  $T$  como tiempo de maduración. El precio de esta opción al tiempo  $t \in [0, T]$  es igual a  $V(s(t), t)$ , en donde  $s(t)$  es el precio de la acción al tiempo  $t$ , y en donde

$$V(x, t) = xN(d_1) - \frac{N(d_2)}{e^{r(T-t)}}K.$$

Por último, las constantes  $d_1$  y  $d_2$  están definidas por

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t},$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}.$$

En el apartado §5 se probará el Teorema 19. El Corolario 22 será demostrado en §6. En la Figura 4 se presenta las gráficas de tres funciones: (1) la función de pago  $\pi(S)$ , (2) la función  $V(S, t)$  como está definida en la Definición 16, y (3) la aproximación a  $V(S, t)$  mediante las sumas (20).

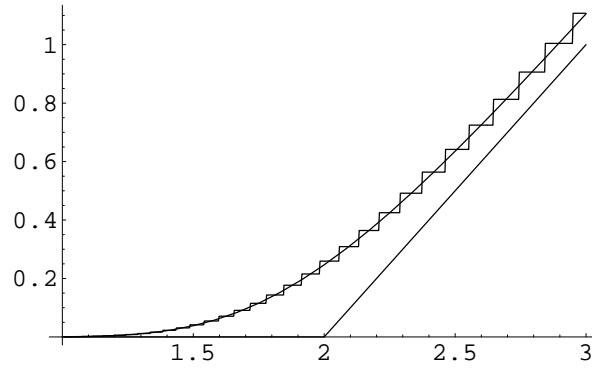


Figura 4.

La Figura 4 se elaboró con los siguientes valores para los parámetros

$$T = 20, \quad t = 19, \quad r = .05 \quad K = 2 \quad \sigma = .25.$$

Para la aproximación mediante la suma (20) se tomó

$$n = 3850, \quad \delta = \frac{T}{n}, \quad \varrho = e^{r\delta}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}}, \quad p = \frac{\varrho - d}{u - d}$$

y  $q = 1 - p$ . Aparte de todos estos datos, también es necesario conocer el valor de  $\ell$  en (20). Este valor de  $\ell$  depende del valor de  $x = S$ . Para calcular  $\ell$  es suficiente tomar  $s_0 = 1$  en (21). Al despejar se obtiene que

$$\ell = \left\langle \frac{\log x - j \log d}{\log u - \log d} \right\rangle$$

en donde  $\langle x \rangle$  es la mínima distancia de  $x$  al conjunto de los números enteros  $\mathbf{Z}$ . Por último, dado el valor de  $t \in [0, T]$  (en este caso  $t = 19$ ) también es necesario determinar el valor de  $j$  tal que  $\delta j$  aproxima a  $t$  como en el Lema 2.

**§5. Demostración del Teorema 19.**

Según observamos después del Lema 8, los valores de  $\xi_j$  (para  $0 \leq j < n$ ) están determinados por los valores de  $\xi_n$ , mediante  $\xi_j = \mathbf{E}(\xi_n | \Omega_j)$ .

**Definición 23.** Sea  $\eta_n = \frac{\pi(S_n)}{\varrho^n}$ . Para  $0 \leq j < n$  sea  $\eta_j = \mathbf{E}(\eta_n | \Omega_j)$ .  $\square$

Ahora sólo resta decir cuál debe ser la sucesión de costos de armadura  $\Psi = \{p_j\}$ . Para definir  $p_j$  se requiere que la relación entre  $\eta_j$  y  $p_j$ , sea como la relación entre  $\xi_j$  y  $S_j$  de acuerdo a la siguiente Definición 24 y como se ilustra en el siguiente diagrama. Ver la expresión (4).

$$\begin{array}{ccc} \xi_j & - & S_j \\ | & & | \\ \eta_j & - & p_j \end{array}$$

**Definición 24.** Sea  $p_j = \varrho^j \eta_j$ .  $\square$

Por definición,  $\{\eta_j\}$  es una martingala. Por lo tanto, la Proposición 9 vale para  $\{\eta_j\}$  en lugar de  $\{\xi_j\}$ . En la demostración del Teorema 25 que sigue, la parte (b) de la Proposición 9, aplicada tanto a  $\{\xi_j\}$  como a  $\{\eta_j\}$ , jugará un papel decisivo. La expresión (20) para  $p_j$  se sigue de la parte (a) de la Proposición 9 aplicada a  $\eta_j$ .

El siguiente resultado, de interés fundamental, afirma que el valor de la función  $\phi_{j+1}$ , que involucra cantidades que se conocen sólo al tiempo  $j + 1$ , se conoce ya al tiempo  $j$ . Se dice entonces que  $\phi_j$  es predecible.

**Teorema 25.** Sean  $\{\xi_j\}$  y  $\{\eta_j\}$  dos martingalas, de modo que

$$\xi_j = \mathbf{E}(\xi_k | \Omega_j) \quad y \quad \eta_j = \mathbf{E}(\eta_k | \Omega_j) \quad \text{para cada } j < k.$$

Sea

$$\phi_{j+1} = \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{\xi_{j+1} - \xi_j}.$$

Entonces el valor de  $\phi_{j+1}$  se conoce ya al tiempo  $j$ .

**Demostración.** Sean  $C < B$  los dos valores posibles de  $\xi_{j+1}$  y sea  $A = pB + qC$ . De manera análoga, sean  $\gamma < \beta$  los dos valores posibles de  $\eta_{j+1}$  y sea  $\alpha = p\beta + q\gamma$ . Es suficiente probar que

$$(26) \quad \frac{\beta - \alpha}{B - A} = \frac{\gamma - \alpha}{C - A}.$$

En efecto, dado el valor de  $\xi_j = A$  y de  $\eta_j = \alpha$ , entonces los dos valores posibles de  $\phi_{j+1}$  corresponden a los lados izquierdo y derecho de (26). Por último, nótese que (26) se sigue de

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = -\frac{q}{p} = \frac{B - A}{C - A}. \blacksquare$$

El siguiente corolario se deduce de inmediato del Teorema 25, pero no juega ningún papel en nuestra discusión. Es interesante, sin embargo, hacer notar que dada una martingala  $\{\xi_j\}$ , cualquier otra martingala  $\{\eta_j\}$  se puede representar en términos de  $\{\xi_j\}$ .

**Corolario 27.** Si  $\{\xi_j\}$ ,  $\{\eta_j\}$  y  $\{\phi_j\}$  son como en el Teorema 25, entonces

$$\eta_k = \eta_0 + \sum_{j=0}^{k-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \phi_{j+1}.$$

Con  $p_j = \varrho^j \eta_j$  como en la Definición 24, ahora podemos probar la parte (a) del Teorema 19, con  $\Phi = \{\phi_j\}$  y  $\Psi = \{p_j\}$ . En efecto, al tiempo  $j$  el costo del portafolio es igual al monto  $s_j \phi_{j+1}$  invertido en la compra de acciones, más el monto depositado en el banco  $p_j - \phi_{j+1} S_j$ . Es es decir, el costo de armadura es igual a  $p_j$ .

Al tiempo  $j + 1$ , el valor del portafolio después del ejercicio, es igual a

$$\gamma_j(\Phi, \Psi) = S_{j+1} \phi_{j+1} + (p_j - \phi_{j+1} S_j) \varrho.$$

Medido al tiempo 0, este valor es igual a

$$\frac{S_{j+1}}{\varrho^{j+1}} \phi_{j+1} + (p_j - \phi_{j+1} S_j) \frac{1}{\varrho^j}.$$

Puesto que  $\xi_j = S_j/\varrho^j$ , entonces el Teorema 25 implica que esta última expresión es igual a

$$\eta_j + \phi_{j+1}(\xi_{j+1} - \xi_j) = \eta_{j+1}.$$

Este es el valor del portafolio después del ejercicio en unidades monetarias del tiempo 0. Al tiempo  $j$ , este valor es igual a  $p_j = \varrho^j \eta_j$ , que es el precio de armadura del porafolio al tiempo  $j$ . Esto termina la prueba de la parte (a) del Teorema 19.

La parte (b) se cumple por definición. Para la parte (c) del Teorema 19, ver la discusión después de la fórmula (21). Sólo falta la parte (d).

Para cada  $0 \leq j < n$  sea  $X_j = 1$  siempre que  $S_{j+1} = uS_j$  y sea  $X_j = 0$  siempre que  $S_{j+1} = dS_j$ . Supondremos además que

$$u = e^{\sigma_1 \sqrt{\delta}} \quad \text{y que} \quad d = e^{-\sigma_2 \sqrt{\delta}}.$$

En este caso  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $p$  son los parámetros del modelo. Puesto que hemos requerido que la sucesión  $\{\xi_j\}$  sea una martingala, entonces los valores de estos tres parámetros deben satisfacer la condición de la Proposición 7.

**Proposición 28.** *Para cada  $0 \leq j < n$  se cumple que*

$$\log \left( \frac{S_n}{S_j} \right) = -\sqrt{\delta}(n-j)\sigma_2 + \sqrt{\delta}(\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{k=j}^{n-1} X_k.$$

**Demostración.** Nótese primero que

$$\frac{S_{j+1}}{S_j} = \left( \frac{u}{d} \right)^{X_j} d.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{S_n}{S_j} \right) &= \log \left( \frac{S_n}{S_{n-1}} \cdots \frac{S_{j+1}}{S_j} \right) \\ &= \sum_{k=j}^{n-1} \log \left( \frac{S_{k+1}}{S_k} \right) \\ &= \log \left( \frac{u}{d} \right) \sum_{k=j}^{n-1} X_k + (n-j) \log d. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Lema 29.** Suponga que  $p$ ,  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  satisfacen la condición de la Proposición 7, de modo que

$$e^{r\delta} = pe^{\sigma_1\sqrt{\delta}} + qe^{-\sigma_2\sqrt{\delta}}.$$

Entonces se cumple que, para  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$p = \frac{e^{r\delta} - e^{-\sigma_2\sqrt{\delta}}}{e^{\sigma_1\sqrt{\delta}} - e^{-\sigma_2\sqrt{\delta}}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} + A_1\sqrt{\delta} + A_2\delta + O(\delta^{\frac{3}{2}})$$

en donde

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_1 + \sigma_2} \left( r - \frac{\sigma_1\sigma_2}{2} \right) \quad y \quad A_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \left( \frac{\sigma_1\sigma_2}{12} - \frac{r}{2} \right).$$

En vista del Lema 23, es conveniente escribir

$$p^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad q^* = 1 - p^*, \quad \sigma^2 = \sigma_1\sigma_2.$$

Es fácil verificar que estas relaciones son equivalentes a

$$(30) \quad \sigma_1 = \sigma \sqrt{\frac{q^*}{p^*}} \quad y \quad \sigma_2 = \sigma \sqrt{\frac{p^*}{q^*}}.$$

**Lema 31.** Sea  $\tau = T - t$ . Sea  $p$  como en el Lema 29. Sea

$$E = \begin{cases} O(\delta) & \text{si } \sigma_1 = \sigma_2, \\ O(\sqrt{\delta}) & \text{si } \sigma_1 \neq \sigma_2. \end{cases}$$

Entonces

$$S_n = s_j \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma \sqrt{\tau} \mathcal{Z}_j^n \right\} e^E$$

en donde

$$\mathcal{Z}_j^n := \frac{1 + E}{\sqrt{pq(n-j)}} \sum_{k=j}^{n-1} (X_k - p).$$

**Demostración.** En efecto,

$$\begin{aligned} \log \left( \frac{S_n}{S_j} \right) &= \sqrt{\delta} (\sigma_1 + \sigma_2) \left\{ - (n-j) \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} + \sum_{k=j}^{n-1} X_k \right\} \\ &= \sqrt{\delta} (\sigma_1 + \sigma_2) \left\{ (n-j) \left[ p - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] + \sum_{k=j}^{n-1} (X_k - p) \right\}. \end{aligned}$$

Sea  $\tau_j = T - \delta j$ . Por el Lema 29, se cumple que  $\log(S_n/S_j)$  es igual a

$$\begin{aligned} & \sqrt{\delta}(\sigma_1 + \sigma_2) \left\{ (n-j)(A_1\sqrt{\delta} + A_2\delta + O(\delta^{\frac{3}{2}})) + \sum_{k=j}^{n-1} (X_k - p) \right\} \\ &= (\sigma_1 + \sigma_2) \left\{ A_1\tau_j + E + \sqrt{\delta} \sum_{k=j}^{n-1} (X_k - p) \right\} \\ &= \left( r - \frac{\sigma_1\sigma_2}{2} \right) \tau_j + E + \sqrt{\delta}(\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{k=j}^{n-1} (X_k - p). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{1}{\sqrt{pq}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} + E.$$

En resumen, tenemos que

$$\log\left(\frac{S_n}{S_j}\right) = \left( r - \frac{\sigma_1\sigma_2}{2} \right) \tau_j + E + \sqrt{\sigma_1\sigma_2}\tau_j \frac{1+E}{\sqrt{pq}(n-j)} \sum_{k=j}^{n-1} (X_k - p).$$

El lema se sigue de la relación  $\tau_j = \tau + O(\delta)$ . ■

Con objeto de simplificar los cálculos que siguen, sean

$$A = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau, \quad B = \sigma\sqrt{\tau}, \quad \tilde{n} = n - j \quad y \quad K = \sqrt{\theta \log n}$$

en donde  $\theta > 1$  es una constante arbitraria.

Ahora queremos estudiar la suma

$$(32) \quad \left(\frac{q}{\rho}\right)^{\tilde{n}} \sum_k^* \binom{\tilde{n}}{k} \left(\frac{p}{q}\right)^k \pi(S_n(\ell + k))$$

en donde el asterisco en la suma indica que el índice  $k$  es tal que  $|k - \tilde{n}p| < K\sqrt{pq\tilde{n}}$ . Note el lector que la suma (32) es la suma que aparece en la expresión (20) para  $p_j$ , salvo por la omisión de algunos términos. Por la

Proposición 31, se cumple que

$$\begin{aligned}
 S_n(\ell + k) &= s_j \exp \left\{ A + B \frac{k - p\tilde{n}}{\sqrt{pq\tilde{n}}} (1 + E) \right\} e^E \\
 &= s_j \exp \left\{ A + B \frac{k - p\tilde{n}}{\sqrt{pq\tilde{n}}} + O(KE) \right\} e^E \\
 &= s_j \exp \left\{ A + B \frac{k - p\tilde{n}}{\sqrt{pq\tilde{n}}} \right\} (1 + O(KE)) \\
 &= s_j \exp \left\{ A + B \frac{k - p\tilde{n}}{\sqrt{pq\tilde{n}}} \right\} + O(KE e^{BK}).
 \end{aligned}$$

Nótese que  $KE e^{BK} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por hipótesis se cumple además que  $\pi(x + \epsilon) = \pi(x) + O(\epsilon)$ . Por lo tanto,

$$\pi(S_n(\ell + k)) = \pi \left[ s_j \exp \left\{ A + B \frac{k - p\tilde{n}}{\sqrt{pq\tilde{n}}} \right\} \right] + O(KE e^{BK})$$

para cada  $k$  tal que  $|k - \tilde{n}p| < K\sqrt{pq\tilde{n}}$ . Por el Lema 3 del Capítulo 1, podemos escribir la suma (32) como

$$\left[ 1 + O(KE e^{BK}) \right] \frac{\varrho^{-\tilde{n}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_k^* \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{k - p\tilde{n}}{\sqrt{pq\tilde{n}}} \right)^2}}{\sqrt{pq\tilde{n}}} \pi \left[ s_j \exp \left\{ A + B \frac{k - p\tilde{n}}{\sqrt{pq\tilde{n}}} \right\} \right].$$

Por el Lema 4 del Capítulo 1, esto último es igual a (con  $\tau = T - t$ )

$$\frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K}^{+K} \pi(s e^{A+By}) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + O(KE e^{BK}).$$

Sea  $\lambda > 0$  la constante que aparece en (15). Puesto que  $K = \sqrt{\theta \log n}$  y además  $\theta > 1$ , entonces se cumple que

$$\int_K^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2 + \lambda y} dy \ll \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\lambda \sqrt{\log n}}.$$

Puesto que  $E \ll 1/\sqrt{n}$ , entonces

$$KEe^{BK} \ll \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{B\sqrt{\log n}}.$$

En resumen, existe  $\lambda > 0$  tal que la suma (32) es igual a

$$(33) \quad \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(se^{A+By}) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + O\left\{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda\sqrt{\log n}}\right\}.$$

Consideramos ahora la suma

$$(34) \quad \left(\frac{q}{\rho}\right)^{\tilde{n}} \sum_k^{\dagger} \binom{\tilde{n}}{k} \left(\frac{p}{q}\right)^k \pi(S_n(\ell+k))$$

en donde el símbolo  $\dagger$  indica que la suma es sobre aquellas  $k$  que satisfacen  $|k - \tilde{n}p| \geq K\sqrt{pq\tilde{n}}$ . Por lo tanto, (34) más (32) es igual a la suma (20). Por la hipótesis (15) se cumple que

$$\pi(S_n) \ll \exp\left\{\lambda_1 \frac{k - \tilde{n}p}{\sqrt{pq\tilde{n}}}\right\} \quad \text{para una } \lambda_1 > 0 \text{ constante.}$$

Por lo tanto la suma (34) es

$$\ll \sum_k^{\dagger} \binom{\tilde{n}}{k} p^k q^{\tilde{n}-k} \exp\left\{\lambda_1 \frac{k - \tilde{n}p}{\sqrt{pq\tilde{n}}}\right\}.$$

Por la Proposición 8 del Capítulo 1, existen constantes  $c_1 > 0$ ,  $c_2, c_3 > 0$ , tal que la suma (34) es

$$\begin{aligned} &\ll \sqrt{\tilde{n}} \sum_k^{\dagger} \exp\left\{-c_1 \left(\frac{k - \tilde{n}p}{\sqrt{pq\tilde{n}}}\right)^2 + \lambda_1 \frac{k - \tilde{n}p}{\sqrt{pq\tilde{n}}}\right\} \\ &\ll \tilde{n} \int_K^{\infty} e^{-c_1(x-c_2)^2} dx \ll ne^{-c_3K^2} = n^{1-c_3\theta} \end{aligned}$$

ya que  $K = \sqrt{\theta \log n}$ . Puesto que  $\theta > 1$  es constante, pero tan grande como se quiera, entonces la suma (34) es

$$(35) \quad \left(\frac{q}{\rho}\right)^{\tilde{n}} \sum_k^{\dagger} \binom{\tilde{n}}{k} \left(\frac{p}{q}\right)^k \pi(S_n(\ell+k)) \ll \frac{1}{n^{c_4}}$$

en donde  $c_4 > 0$  es constante pero tan grande como se quiera. La parte (d) del Teorema 19 se desprende de (33) y (35) después de hacer que  $n \rightarrow \infty$ . De hecho, nosotros hemos probado que

$$p_j = V(s_j, \delta j) + O\left\{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda\sqrt{\log n}}\right\} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

### §6. Demostración del Corolario 22.

Para probar que el Corolario 22 se cumple, sólo basta evaluar la siguiente integral

$$(36) \quad \frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(xe^{A+By}) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

en donde

$$A = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau, \quad B = \sigma\sqrt{\tau}, \quad \tau = T - t \quad \text{y} \quad \pi(x) = \max\{x - K, 0\}.$$

El integrando en (36) se anula a menos que  $xe^{A+By} > K$ , pero esta desigualdad se cumple si y sólo si

$$y > \frac{1}{B} \log\left(\frac{K}{x}\right) - \frac{A}{B} =: y_0.$$

Por lo tanto, (36) es igual a

$$\frac{e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0}^{\infty} (xe^{A+By} - K) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{xe^{A-r\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0}^{\infty} e^{By - \frac{1}{2}y^2} dy - \frac{K}{e^{r\tau}} N(-y_0).$$

Ahora bien,

$$-y_0 = \frac{A}{B} + \frac{1}{B} \log\left(\frac{x}{K}\right) = \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\tau + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \log\left(\frac{x}{K}\right) = d_2.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{xe^{A-r\tau + \frac{1}{2}B^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-B)^2} dy = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_0-B}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = xN(B - y_0)$$

ya que  $A = r\tau - \frac{1}{2}B^2$ . Por último,

$$B - y_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\tau} = d_1.$$

Esto termina la demostración del Corolario 22.

## Capítulo 4

# La Ecuación Diferencial de Black y Scholes

### §1. Introducción.

El objeto de este capítulo es plantear la ecuación en derivadas parciales que el precio de una opción debe satisfacer. La solución de esta ecuación diferencial está dada por la función  $V(x, t)$  que aparece en la Definición 16 del Capítulo 3. Aquí volveremos a obtener la solución de la ecuación de Black y Scholes mediante el uso de la transformada de Mellin.

### §2. El Movimiento Browniano.

La Definición 1 que aparece a continuación hace una descripción suficiente para nuestros fines del movimiento browniano. Para un tratamiento más formal del movimiento browniano, ver por ejemplo Billingsley [1].

**Definición 1.** Sea  $T > 0$  y sea  $\sigma > 0$ . La colección (no numerable) de variables aleatorias  $\{W(t) : t \in [0, T]\}$  se llama movimiento browniano si se cumplen las tres condiciones que siguen.

(a)  $W(0) = 0$ .

(b) Para cada  $t_1 < t_2$  se cumple que  $\mathbf{P}\left\{\frac{W(t_2) - W(t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}} \leq x\right\} = N(x)$ .

(c) La condición (b) se cumple independientemente del valor de  $W(t)$  para cada  $t < t_1$ .

En caso de que  $\sigma = 1$ , entonces decimos que el movimiento browniano es estándar.  $\square$

Nosotros no probaremos la existencia del movimiento browniano. La descripción de la caminata aleatoria que sigue a continuación debe ser suficiente para un tratamiento heurístico del movimiento browniano.

Consideremos pues una caminata aleatoria realizada en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  y en donde los pasos de la caminata son de longitud  $\Delta > 0$ . Sea  $n$  un número entero positivo. En cada uno de los  $n$  instantes de tiempo

$$j\delta \quad \text{con} \quad 0 < j \leq n, \quad \text{en donde} \quad \delta = \frac{T}{n},$$

se lanza al aire una moneda honesta. Si al tiempo  $j$  (o equivalentemente, al tiempo  $t = j\delta$ ) la moneda cayó en águila, entonces damos un paso de magnitud  $\Delta$  en la dirección positiva. Si al tiempo  $j$  la moneda cayó en sol, entonces damos un paso de magnitud  $\Delta$  en la dirección negativa. Podemos suponer que esta caminata aleatoria empieza en el origen.

Con objeto de hacer una descripción más analítica de la caminata aleatoria, descrita en párrafo anterior, vamos a considerar una sucesión de variables  $\{X_j\}$ . Suponemos que las variables  $X_j$  son independientes, idénticamente distribuidas y tales que

$$\mathbf{P}\{X_j = +\Delta\} = \frac{1}{2} = \mathbf{P}\{X_j = -\Delta\}.$$

Si para cada  $k \geq 1$  hacemos que

$$w_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

entonces  $w_k$  es la posición después de haber realizado  $k$  pasos aleatorios. Haciendo que  $w_0 = 0$ , la caminata aleatoria es el conjunto de puntos

$$(k\delta, w_k) \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq n$$

del plano cartesiano  $\mathbf{R}^2$ . Ahora queremos hacer que  $n$  sea cada vez más grande, es decir, queremos que  $n \rightarrow \infty$ . Es conveniente sin embargo, hacer que la magnitud  $\Delta$  de los pasos aleatorios sea cada vez más pequeña conforme  $n$  es cada vez más grande.

Dado un valor fijo de  $t \in [0, T]$ , hacemos

$$(2) \quad k = \left[ \frac{t}{T} n \right] \quad \text{de modo que} \quad k\delta \rightarrow t$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . Aquí  $[x]$  es la parte entera de  $x$ . Para determinar qué magnitud debe tener  $\Delta$  cuando  $n$  es grande, nótese que la varianza de  $w_k$  es

$$\mathbf{E}(w_k^2) = k\Delta^2.$$

Por el Teorema de DeMoivre-Laplace se cumple que

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{w_k}{\Delta\sqrt{k}} \leq x \right\} = N(x) + O\left[ \frac{\log^{\frac{3}{2}} n}{\sqrt{n}} \right].$$

Para hacer que la parte (b) de la Definición 1 se cumpla (salvo por el término de error) con  $t_1 = 0$  y con  $t_2 = t$ , es necesario que

$$(3) \quad \Delta\sqrt{k} \rightarrow \sigma\sqrt{t} \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty.$$

De las condiciones (2) y (3) se deduce cuál debe ser la magnitud de  $\Delta$ . Así entonces hacemos que

$$(4) \quad \Delta = \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}.$$

En la Figura 5 se muestra una simulación de una caminata aleatoria con  $n = 100$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 1$  y  $\Delta = 1/10$ . Por otro lado, la Figura 6 muestra una simulación de una caminata aleatoria con  $n = 10\,000$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 1$  y  $\Delta = 1/100$ . Con este valor de 10 000 se agotan las posibilidades de resolución de la gráfica, en el sentido de que con valores mayores para  $n$  no se obtienen gráficas de apariencia distinta de la Figura 6.

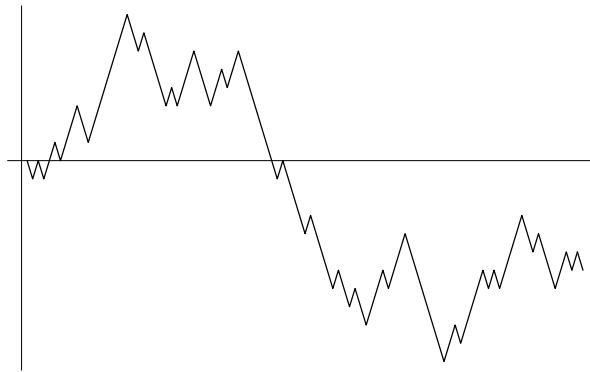


Figura 5.

**Observación 5.** Si en una caminata aleatoria escribimos  $dt$  en lugar de  $T/n$  y escribimos  $dw$  en lugar de  $\Delta$ , entonces se cumple que

$$(dw)^2 = \sigma^2 dt.$$

Compare el lector esta expresión con la (4).  $\square$

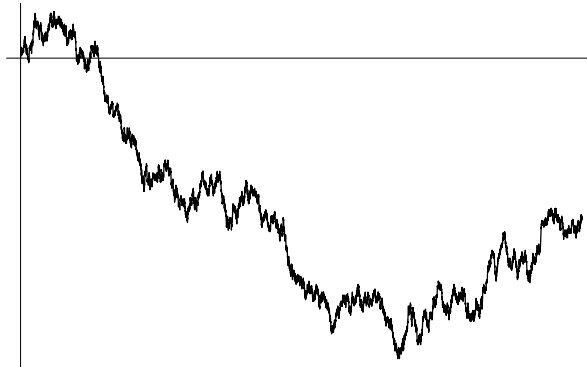


Figura 6.

Se puede pensar que una caminata aleatoria, en donde  $n$  es muy grande, es una buena aproximación al movimiento browniano. Así, siempre que en lo sucesivo nos refiramos al movimiento browniano, el lector puede pensar que nos estamos refiriendo a una caminata aleatoria en donde  $n$  es grande. Para un movimiento browniano estándar, en donde  $\sigma = 1$ , se cumple que

$$(6) \quad (dW)^2 = dt.$$

### §3. La Ecuación de Black y Scholes.

**Definición 7.** La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

se llama la ecuación de Black y Scholes.  $\square$

Como se mostrará en este apartado, la ecuación de Black y Scholes es la ecuación que el precio de una opción debe satisfacer. Mediante  $V(S, t)$  se denota el precio de una opción sobre una acción que al tiempo  $t \in [0, T]$  tiene un valor igual a  $S$ . Se supone que la opción se emite al tiempo 0 y que  $T$  es el tiempo de maduración. También se supone que  $V(S, T) = \pi(S)$  en donde  $\pi(S)$  es la función de pago de la opción, ver el apartado §4 del Capítulo 3.

Si  $P = P(t)$  es el monto invertido en una cuenta bancaria, entonces  $P(t) = P_0 e^{rt}$  en donde  $r$  es la tasa de interés que paga el banco. Se cumple entonces que

$$(8) \quad \frac{dP}{P} = r dt.$$

Invertir en la compra de acciones es una alternativa a depositar dinero en el banco. Si  $S = S(t)$  es el monto invertido en acciones, entonces nosotros supondremos que

$$(9) \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

en donde  $\sigma > 0$  y  $W$  denota el movimiento browniano estándar. Mientras que la tasa de interés bancaria  $r$  está fija,  $S(t)$  crece a una tasa que varía de manera aleatoria. En efecto,  $dS/S$  contiene el término  $\sigma dW$ , que es aleatorio. Entre más grande sea el valor de  $\sigma$ , mayor será la incertidumbre sobre el rendimiento de la inversión. Por otro lado, es usual que  $\mu > r$  y por lo tanto invertir en acciones es todavía atractivo.

El precio  $V$  de una opción es función del tiempo  $t$  y del precio  $S$  de la acción subyacente. Se dice entonces que el precio de una opción se deriva del precio de la acción. Se llama producto derivado a cualquier función de  $S$  y de  $t$ .

Consideremos un producto derivado  $f(S, t)$  que deriva su valor del valor de  $S$ , en donde  $S$  satisface la ecuación (9). Por la fórmula de Taylor

$$(10) \quad df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 + \dots$$

en donde los términos omitidos son mucho más pequeños que los términos que aparecen de forma explícita. Puesto que (9) se cumple, entonces ponemos en (10) la expresión  $\mu S dt + \sigma S dW$  en lugar de  $dS$  y así obtenemos

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} \right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dW)^2$$

en donde se han omitido todos los términos que son más pequeños que  $dt$ . Como se indicó en (6) se cumple que  $(dW)^2 = dt$ . Por lo tanto

$$(11) \quad df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW.$$

Podemos resumir esta discusión en el siguiente lema.

**Lema 12. (de Itô).** Si  $f = f(S, t)$  y además se cumple (9), entonces  $df$  es como en (11).

Consideremos ahora un portafolio dinámico

$$\Gamma = \{(\phi_t, P_t) : 0 \leq t \leq T\}$$

en donde  $\phi_t$  es el número de acciones dentro del portafolio al tiempo  $t$  y en donde  $P_t$  es el monto invertido en el banco al tiempo  $t$ . Nuestro propósito es hacer que el valor del portafolio  $\Gamma$  sea igual a (o replique) el valor del producto derivado. Es decir, queremos que

$$(13) \quad f = \phi S + P$$

en donde el lado derecho de (13) es el valor del portafolio y  $f$  es el valor del producto derivado.

Durante un intervalo de tiempo  $dt$ , el valor del portafolio sufre un incremento igual a

$$df = \phi dS + dP.$$

Para mayor generalidad, consideramos aquí también el caso de una opción que paga dividendos a una tasa igual a  $q$ . En este caso el cambio en el valor del portafolio es

$$df = \phi dS + \phi S q dt + dP.$$

Tomando en cuenta (8) y (9) vemos que

$$(14) \quad df = (\phi S(\mu + q) + rP) dt + \phi S \sigma dW.$$

Como (11) y (14) deben ser iguales, entonces vemos que necesariamente

$$(15) \quad \phi = \frac{\partial f}{\partial S}.$$

Con este valor para  $\phi$ , las condiciones (11) y (14) implican que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = S q \frac{\partial f}{\partial S} + rP.$$

Puesto que (13) y (15) se cumplen, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = Sq \frac{\partial f}{\partial S} + \left(f - S \frac{\partial f}{\partial S}\right)r.$$

Resumiendo lo anterior, podemos ahora afirmar que

$$(16) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

La ecuación de Black y Scholes corresponde al caso de que  $q = 0$ , es decir, corresponde al caso de una opción sobre una acción que no paga dividendos.

El paso decisivo para la deducción de la fórmula de Black y Scholes es hacer que las dos expresiones (11) y (14) para el incremento  $df$  sean iguales. Esto está motivado por el deseo de que el precio del portafolio  $\Gamma$  sea igual al precio de la opción en cada instante de tiempo. De esta manera el emisor puede invertir el monto recibido por la venta de la opción en un portafolio dinámico que, al tiempo de maduración  $T$ , genera la misma ganancia  $\pi$  que la compra de la opción le genera a su tenedor.

En la siguiente proposición damos la fórmula para el precio de una opción sobre una acción que paga dividendos y que tiene a  $\pi(x) = (x - K)^+$  como función de pago.

**Proposición 17.** *Sea  $\pi(x) = (x - K)^+$ . Si  $f$  satisface (16) y además  $f(x, T) = \pi(x)$ , entonces*

$$f(x, t) = x \frac{N(d_1)}{e^{q(T-t)}} + \frac{N(d_2)}{e^{r(T-t)}} K$$

en donde  $d_1$  y  $d_2$  están definidas por

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(\frac{r-q}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t},$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(\frac{r-q}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t}.$$

**Demostración.** Sea  $E = e^{-q(T-t)}$ . Sea  $V = V(x, t)$  la solución de la ecuación de Black y Scholes de la Definición 7 con  $r - q$  en lugar de

$r$ . Si además requerimos que  $V(x, T) = \pi(x)$ , entonces  $V$  es como en el Corolario 22 del Capítulo 1. Por lo tanto será suficiente si  $f = EV$  ya que la expresión propuesta para  $f$  es igual a  $EV$  con  $r - q$  en lugar de  $r$ .

Se cumple que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = E \frac{\partial V}{\partial t} + qEV \quad \text{y} \quad \frac{\partial^j f}{\partial S^j} = E \frac{\partial^j V}{\partial S^j} \quad \text{para} \quad j = 1, 2.$$

Por lo tanto el lado derecho de (16) es igual a

$$qEV + E \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right\}.$$

Puesto que  $V$  satisface la ecuación de Black y Scholes con  $q - r$  en lugar de  $r$ , entonces la expresión entre llaves es igual a  $(r - q)V$  y por lo tanto el lado derecho de (16) es igual a

$$qEV + E(r - q)V = rf.$$

Así entonces  $f = EV$  satisface (16). Por último, es claro que  $f(x, T) = V(x, T) = \pi(x)$ . ■

#### §4. Solución Mediante la Transformada de Mellin.

En esta sección se obtiene la solución de la ecuación de Black y Scholes (16) en donde los coeficientes  $r$ ,  $\sigma$  y  $q$  pueden variar con el tiempo. Así entonces consideramos la ecuación

$$(18) \quad f_t + q(t)xf_x + \frac{1}{2}\sigma^2(t)x^2f_{xx} = r(t)f.$$

Compare el lector (18) con la Definición 7 y la ecuación (16). Nuestra tarea es determinar  $f$  tal que (18) se cumple y además

$$(19) \quad f(x, T) = \pi(x).$$

La transformada de Mellin de una función  $f$  se denota mediante  $\widehat{f}$  y se define mediante

$$(20) \quad \widehat{f}(\xi) = \int_0^{\infty} y^{\xi-1} f(y) dy$$

para aquellos números  $\xi \in \mathbf{R}$  para los cuales la integral que define a  $\widehat{f}$  sea absolutamente convergente. Como hipótesis de trabajo, nosotros supondremos que  $\widehat{f}$  está definida para cada  $\xi \in \mathbf{R}$  y así procederemos de manera formal en los cálculos que involucran a  $\widehat{f}$ . Después de haber determinado la solución  $f$  de la ecuación (18) veremos, a posteriori, que  $\widehat{f}$  en efecto está bien definida para toda  $\xi \in \mathbf{R}$ .

Para resolver la ecuación (18) nosotros supondremos que  $t$  es constante y calcularemos la transformada de Mellin de  $f$  con respecto a la variable  $x$ . Para la transformada de Mellin de  $f(x, t)$ , en ocasiones escribiremos  $\widehat{f}(\xi)$ , o todavía más brevemente  $\widehat{f}$ .

Consideremos primero la transformada del término  $xf_x$  que aparece en (18). Integrando por partes, obtenemos

$$\widehat{xf_x}(\xi) = \int_0^{\infty} y^{\xi} f_x(y) dy = y^{\xi} f(y) \Big|_0^{\infty} - \xi \int_0^{\infty} y^{\xi-1} f(y) dy.$$

En el caso de que  $\xi$  y  $f$  sean tal que  $y^{\xi} f(y) \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow 0$  y también cuando  $y \rightarrow \infty$ , entonces se cumple que

$$(21) \quad \widehat{xf_x}(\xi) = -\xi \widehat{f}(\xi).$$

Si adicionalmente se cumple que  $y^{\xi+1} f_x(y) \rightarrow 0$  cuando  $y \rightarrow \infty$ , entonces, integrando dos veces por partes, se obtiene

$$(22) \quad \widehat{x^2 f_{xx}}(\xi) = (\xi^2 + \xi) \widehat{f}(\xi).$$

Para la transformada del primer término en el lado derecho de (18) tenemos

$$(23) \quad \widehat{f_t}(\xi) = \int_0^{\infty} y^{\xi-1} \frac{\partial f}{\partial t}(y) dy = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} y^{\xi-1} f(y) dy = \frac{d\widehat{f}}{dt}(\xi).$$

Aquí también se imponen condiciones sobre  $f$  que permitan el intercambio en el orden de derivada e integral.

Tomando transformada de Mellin en (18) tenemos que

$$\frac{d\widehat{f}}{dt} - q\xi \widehat{f} + \frac{\sigma^2}{2}(\xi^2 + \xi)\widehat{f} = r\widehat{f}$$

o lo que es lo mismo

$$(24) \quad \frac{d\widehat{f}}{dt} = \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{S}}{dt} \xi^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{S}}{dt} - \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right) \xi - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right\} \widehat{f}$$

y en donde hemos escrito

$$(25) \quad \mathbf{S}(t) = \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau, \quad \mathbf{Q}(t) = \int_t^T q(\tau) d\tau, \quad \mathbf{R}(t) = \int_t^T r(\tau) d\tau.$$

Al tomar la transformada de Mellin, la condición (19) se traduce en la condición  $\widehat{f}(\xi, T) = \widehat{\pi}(\xi)$ . Con esta condición final, la solución de (24) es

$$(26) \quad \widehat{f}(\xi, t) = \widehat{\pi}(\xi) \exp \left\{ \frac{\mathbf{S}}{2} \xi^2 + \left( \frac{\mathbf{S}}{2} - \mathbf{Q} \right) \xi - \mathbf{R} \right\}.$$

Nuestro objetivo ahora es representar la solución de (18) junto con su condición final (19) en términos de la convolución de  $f$  y de un núcleo apropiado. Para esto seguimos a M.R. Rodrigo y R.S. Mamon, ver [8].

**Definición 27.** Sean  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  como en (25). El núcleo B de Black y Scholes se define mediante

$$B(x, t) = \frac{e^{-\mathbf{R}}}{\sqrt{\mathbf{S}}} N' \left( \frac{\log x}{\sqrt{\mathbf{S}}} + \frac{\mathbf{Q}}{\sqrt{\mathbf{S}}} - \frac{\sqrt{\mathbf{S}}}{2} \right)$$

en donde  $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ .  $\square$

**Teorema 28.** La solución de la ecuación diferencial (18) que satisface la condición (19) está dada por

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} B\left(\frac{x}{y}, t\right) \pi(y) dy$$

en donde B es el núcleo de Black y Scholes.

Para la prueba del Teorema 28, serán necesarios tres lemas.

**Lema 29.** Sean  $\alpha > 0$  y  $\beta$  dos números reales. Sea  $\xi \in \mathbf{R}$ . Se cumple que

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{\xi-1} e^{-\frac{1}{2}(\beta+\alpha \log y)^2} dy = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\xi}{\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \xi \right\}.$$

**Demostración.** Nótese primero que

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\xi}{\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} \xi = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \beta - \frac{\xi}{\alpha} \right)^2.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{1}{2}(\beta-\frac{\xi}{\alpha})^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \xi y - \frac{1}{2} (\alpha^2 y^2 + 2\alpha\beta y + \beta^2) \right\} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \alpha^2 y^2 + 2(\alpha\beta - \xi)y + \left( \frac{\alpha\beta - \xi}{\alpha} \right)^2 \right] \right\} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \alpha y + \frac{\alpha\beta - \xi}{\alpha} \right)^2 \right\} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\alpha y)^2} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta^2}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Después de reorganizar los términos se obtiene la afirmación del lema. ■

Mediante el cambio de variables  $y \mapsto e^y$ , la transformada de Mellin se puede escribir como una transformada bilateral de Laplace

$$(20) \quad \int_0^{\infty} y^{\xi-1} f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi y} f(e^y) dy.$$

Se tiene el siguiente Lema 30 sobre la unicidad de la transformada bilateral de Laplace. Ver Widder [9], página 243.

**Lema 30.** Sean  $f_1$  y  $f_2$  funciones tales que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi y} f_1(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi y} f_2(y) dy$$

para cada  $\xi \in I$  en donde  $I \subset \mathbf{R}$  es un intervalo. Se cumple entonces que  $f_1(y) = f_2(y)$  para cada  $y \in \mathbf{R}$ .

Para la demostración del siguiente lema sólo es necesario intercambiar el orden en que se toman las integrales. Ver P.L. Butzer y S. Jansche [3].

**Lema 31.** Suponga que  $\widehat{f}_1(\xi)$  y  $\widehat{f}_2(\xi)$  existen para cada  $\xi \in \mathbf{R}$ . Entonces

$$g(x) := \int_0^{\infty} f_1(y) f_2\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}$$

está bien definida para cada  $x > 0$  y además  $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}_1(\xi)\widehat{f}_2(\xi)$  para cada  $\xi \in \mathbf{R}$ .

**Demostración del Teorema 28.** Poniendo  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}}}$  y  $\beta = \frac{\mathbf{Q}}{\sqrt{\mathbf{S}}} + \frac{\sqrt{\mathbf{S}}}{2}$  vemos que la ecuación (28) el Lema 29 y el Lema 30 implican que

$$\widehat{f}(\xi, t) = \widehat{\pi}(\xi)\widehat{\mathbf{B}}(\xi, t).$$

La expresión propuesta para  $f(x, t)$  es ahora una consecuencia inmediata del Lema 31. ■

La expresión  $f(x, t)$  de la Proposición 28 para la solución de la ecuación (18) de Black y Scholes con coeficientes variables es general en el sentido de que vale para cualquier función de pago  $\pi$ . En la proposición que sigue se considera el caso de que  $\pi$  corresponde a la función de pago de una opción de venta.

**Proposición 32.** Si  $\pi(x) = (x - K)^+$  y  $f(x, t)$  es como en la Proposición 28, entonces

$$f(x, t) = x \frac{e^{\mathbf{Q}}}{e^{\mathbf{R}}} \mathbf{N}(d_1) - \frac{K}{e^{\mathbf{R}}} \mathbf{N}(d_2)$$

en donde

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{S}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{Q}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S}}{2}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{S}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{Q}{\sqrt{S}} - \frac{\sqrt{S}}{2}.$$

**Demostración.** Para el núcleo de Black y Scholes escribiremos  $B(x)$  en lugar de  $B(x, t)$ . La función en cuestión  $f(x, t)$  es igual a

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{y} B\left(\frac{x}{y}\right) (y - K)^+ dy = \int_K^{\infty} B\left(\frac{x}{y}\right) dy - K \int_K^{\infty} \frac{1}{y} B\left(\frac{x}{y}\right) dy.$$

Sea  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{S}}$  y sea  $\beta = \frac{Q}{\sqrt{S}} - \frac{\sqrt{S}}{2}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_K^{\infty} B\left(\frac{x}{y}\right) dy &= x \int_0^{x/K} B(y) \frac{dy}{y^2} \\ &= \frac{x}{e^{\mathbf{R}}} \int_0^{x/K} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha \log y + \beta)^2\right\} \frac{dy}{y^2}. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable  $y \mapsto \exp\frac{y - \beta}{\alpha}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int_K^{\infty} B\left(\frac{x}{y}\right) dy &= \frac{x e^{\frac{\beta}{\alpha}}}{e^{\mathbf{R}} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha \log \frac{x}{K} + \beta} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2 - \frac{y}{\alpha}\right\} dy \\ &= x \exp\left\{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} - \mathbf{R}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \end{aligned}$$

en donde

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{S}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{Q}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S}}{2}.$$

Por otra parte

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} - \mathbf{R} = \mathbf{Q} - \mathbf{R}.$$

Resumiendo lo anterior, tenemos que

$$\int_K^\infty B\left(\frac{x}{y}\right) dy = x \frac{e^{\mathbf{Q}}}{e^{\mathbf{R}}} N(d_1).$$

Consideremos ahora la integral

$$\int_K^\infty \frac{1}{y} B\left(\frac{x}{y}\right) dy = \int_0^{x/K} B(y) \frac{dy}{y} = \frac{\alpha}{e^{\mathbf{R}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x/K} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\alpha \log y + \beta)^2\right\} \frac{dy}{y}.$$

Mediante el cambio de variables  $y \mapsto \exp \frac{y - \beta}{\alpha}$  obtenemos

$$K \int_K^\infty \frac{1}{y} B\left(\frac{x}{y}\right) dy = \frac{K e^{-\mathbf{R}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{K}{e^{\mathbf{R}}} N(d_2)$$

en donde

$$d_2 = \alpha \log\left(\frac{x}{K}\right) + \beta = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}}} \log\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{\mathbf{Q}}{\sqrt{\mathbf{S}}} - \frac{\sqrt{\mathbf{S}}}{2}.$$

Esto termina la prueba de la proposición. ■

Es fácil ver que el Corolario 22 del Capítulo 3 y la Proposición 17 de este capítulo son casos particulares de la Proposición 28.

## Referencias

- [1] **Billingsley, P.** *Probability and measure*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [2] **Black, F.; Scholes, M.** *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, vol. 81 (1973) 637-654.
- [3] **Butzer, P.L.; Jansche, S.** *A direct approach to the Mellin transform*. J. Fourier Anal. Appl. vol. 3 (1997) no. 4, 325-376.
- [4] **Cox, J.C.; Ross, S.A.; Rubinstein, M.** *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, vol 7 (1979) 229-263.
- [5] **Jarrow, R.A.** *In Honor of the Nobel Laureates Robert C. Merton and Myron S. Scholes*. Journal of Economic Perspectives. vol. 13 (1999) no. 4, 229-248.
- [6] **Lesigne, E.** *Heads or tails. An introduction to limit theorems in probability*. American Mathematical Society, 2005.
- [7] **Parzen, E.** *Modern probability theory and its applications*. A John Wiley & Sons, 1960.
- [8] **Rodrigo, M.R.; Mamon, R.S.** *An application of Mellin transform techniques to a Black-Scholes equation problem*. Anal. Appl. vol. 5 (2007) no. 1, 51-66.
- [9] **Widder, D.V.** *The Laplace Transform*. Princeton University Press, 1941.