NOTAS DE ANÁLISIS REAL

por Eugenio P. Balanzario

ÍNDICE ANALÍTICO

Capítulo 4
INTEGRAL DE LEBESGUE

Capítulo 5
ANÁLISIS FUNCIONAL

Capítulo 6
MARTINGALAS

Capítulo 6
TEOREMAS LÍMITE DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

PREFACIO

Estas son las notas de clase que corresponden al curso básico de análisis real en el posgrado conjunto UNAM-UMSNH. Se presenta la teoría que justifica algunos los procesos de uso frecuente en las aplicaciones del análisis real. Se incluye una lista de más de 100 ejercicios que deben ayudar al estudiante a desarrollar la habilidad técnica necesaria para la práctica de la investigación en matemáticas puras.

Luis F. Hernández, Gaspar R. de J. León, Antonio Tapia y David Villa contribuyeron en el proceso de la depuración de errores. Las imperfeciones restantes son responsabilidad del autor.

E.P. Balanzario.
Morelia, Michoacán,
Noviembre del 2008.

When I awoke early in the morning, I faced my mother and said to her, "Give me my lunch. I want to go to school". My mother gave me two rolls and I set out. In school, the monitor in charge said to me, "Why are you late?" Afraid and with pounding heart, I entered before my teacher and made a respectful curtsy.

From ancient (4,000 years ago) clay tablets.

After he had been in science for many years, and had served both as colaborator and consultant on many occasions, Richard Feynman offered this advice: "If anyone asks me a question, I always say, 'Differentiate under the integral sign'. More than half the time this will solve their problem. And, even if it doesn't, they will think you are a really smart guy".

From Mathematical Apocrypha by S.G. Krantz.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

§1. Motivación.

La siguiente es una lista (incompleta) de algunas clases de funciones en orden creciente de complejidad:

(a) Polinomios con coeficientes racionales.
(b) Polinomios con coeficientes reales.
(c) Funciones analíticas.
(d) Funciones diferenciables.
(e) Funciones continuas.
(f) Funciones integrables.

En el siguiente Ejercicio 22 se le pide al lector verificar que existen funciones infinitamente derivables que no son analíticas. Mostraremos más adelante que existen funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto de su dominio de definición. Esto muestra que las funciones continuas son ya bastante complicadas.

Un paradigma es un método de solución de un problema que resulta tan eficiente, que en el futuro trataremos de aplicar el método siempre que sea posible. ¿Cuales son los paradigmas favoritos del lector? Proponemos al lector identificar el mayor número de paradigmas en este curso. He aquí un primer ejemplo.

Paradigma 1. Un paradigma importante en análisis es el método de usar objetos simples para aproximar objetos complicados.

En el Capítulo 2 mostraremos que los polinomios con coeficientes reales aproximan bien a las funciones continuas. La ventaja es que los polinomios son mucho más fáciles de manejar que las funciones continuas.

Ejercicio 2. Identificar casos en donde se aplica el Paradigma 1 a lo largo de este curso.

Enunciamos a continuación otro importante paradigma.

Paradigma 3. Siempre que sea posible justificarlo, nos gustaría intercambiar el orden en que se toman dos procesos de paso al límite.

En lo que resta de esta sección explicaremos con más detalle lo que significa intercambiar el orden en que se toman dos procesos de paso al límite. En la sección §2 de este capítulo, ponemos el Paradigma 3 en prespectiva histórica, en el contexto del desarrollo de la teoría inicial de las series de Fourier. Algunos de los resultados más importantes de este curso, son teoremas que nos permiten justificar el intercambio de dos límites.

Definición 4. Sea $\{f_n\} = \{f_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto E. Supongamos que para cada $x \in E$, la sucesión de números $\{f_n(x)\}$ converge al límite $f(x)$. Decimos entonces que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en E. □

Si $\{f_n\}$ es una sucesión que converge puntualmente en un conjunto E y además cada f_n es una función continua, ¿se cumplirá entonces que la función límite f también es continua? Si este es el caso, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; f(a)$$

y por lo tanto, tendríamos que

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) \;=\; \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Así pues, estamos interesados en justificar un intercambio en el orden en que se toman los límites. Este intercambio en el orden de los límites es un proceso delicado y en algunas ocaciones no es posible justificarlo.

Ejemplo 5. Para cada par $m, n \in \mathbf{N}$, sea

$$A(m,n) \;=\; \frac{m}{m+n}.$$

Entonces, para cada n fijo,

$$\lim_{m\to\infty} A(m,n) \;=\; 1, \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} A(m,n) \;=\; 1.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} A(m,n) \;=\; 0. \;\square$$

El siguiente ejemplo muestra que tomar límite y tomar derivada, son procesos que en general no conmutan. Puesto que la derivada se define mediante un paso al límite, entonces en realidad estamos considerando el caso de un intercambio en el orden en que se toman dos límites.

Ejemplo 6. Para cada $x \in \mathbf{R}$, sean

$$f_n(x) \;=\; \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}} \qquad \text{y} \qquad f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; 0.$$

Entonces $f'(x) = 0$ para cada $x \in \mathbf{R}$. Por otro lado

$$f_n'(x) \;=\; \sqrt{n}\cos nx.$$

Vemos entonces que $\{f_n'\}$ no converge puntualmente a f', ya que por ejemplo,

$$f_n'(0) \;=\; \sqrt{n} \to +\infty \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty,$$

mientras que $f'(0) = 0$. □

En el Ejemplo 8 que sigue, mostraremos que tomar límite e integral son procesos que en general no conmutan. La integral también es un proceso límite. Será necesario un resultado auxiliar.

Lema 7. Sea $\alpha > 0$ y sea $R > 1$. Se cumple que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^\alpha}{R^t} \;=\; 0.$$

Demostración. Sea $y = e^t$. Debemos probar entonces que

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\big(\log y\big)^\alpha}{R^{\log y}} \;=\; 0.$$

Ahora bien,

$$R^{\log y} \;=\; e^{\log R \log y} \;=\; y^\beta \qquad \text{en donde} \qquad \beta \;=\; \log R \;>\; 0.$$

Puesto que $f(x) = x^\alpha$ es una función continua, entonces es suficiente si

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y^{\beta/\alpha}} \;=\; 0.$$

Puesto que $x = y^{\beta/\alpha} \to \infty$ siempre que $y \to \infty$, entonces basta si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} \;=\; 0.$$

Pero esto último se cumple, ya que

$$\frac{1}{x}\log x \;=\; \frac{1}{x}\int_1^x \frac{dt}{t} \;=\; \frac{1}{x}\Big\{\int_1^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x\Big\}\frac{dt}{t} \;\le\; \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$$

siempre que $x \to \infty$. ∎

Ejemplo 8. Para cada $x \in [0,1]$, sea

$$f_n(x) \;=\; nx(1-x^2)^n.$$

Si $0 \leq x \leq 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; 0$. Por otro lado, tenemos que

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^n\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,dx \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2} \;\neq\; 0 \;=\; \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \quad \square$$

Vemos pues que intercambiar el orden en que se toman las distintas operaciones del análisis, es un proceso delicado. En general es deseable poder justificar tales intercambios. El concepto de convergencia uniforme y la integral de Lebesgue nos permiten entender mejor cuándo es posible los intercambios en el orden en que se toman los distintos procesos de límite.

§2. Series de Fourier.

Con el objeto de estudiar la conducción de calor en una varilla metálica delgada de longitud 1, denotemos mediante $u(x,t)$ la temperatura en el punto $x \in [0,1]$ al tiempo $t > 0$. Esta función debe satisfacer las siguientes tres condiciones:

$$(\mathbf{9}) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \;=\; c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = f(x),$$

en donde $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ es la distribución de temperatura inicial y $c \in \mathbf{R}$ es una constante apropiada que tomaremos igual a 1. Suponiendo que existe una solución de la forma $u(x,t) = V(x)W(t)$, entonces la ecuación diferencial en (9) se transforma en

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)}.$$

El lado derecho de esta ecuación es independiente de t, mientras que el lado izquierdo es independiente de x. Por lo tanto, ambos lados deben ser iguales a una constante α. Así hemos obtenido el siguiente par de ecuaciones:

$$\textbf{(10)} \qquad W' = \alpha W \qquad \text{y} \qquad V'' = \alpha V.$$

La primera ecuación tiene solución $W(t) = e^{\alpha t}$. Las condiciones $u(0,t) = u(1,t) = 0$ tienen ahora la forma $V(0) = V(1) = 0$. La segunda ecuación en (10) tiene como solución $V(x) = \operatorname{sen} \beta x$ en donde $\alpha = -\beta^2$. Por lo tanto $\beta = n\pi$ en donde $n \in \mathbf{N}$.

Para cada $n \in \mathbf{N}$, sean

$$W_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t} \qquad \text{y} \qquad V_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x.$$

Para cualesquiera constantes $\{a_n\}$, la serie infinita

$$\textbf{(11)} \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, V_n(x)\, W_n(t)$$

es una solución formal del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{sujeto a} \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Si la condición $u(x,0) = f(x)$ en el problema original (9) se satisface, entonces, poniendo $t = 0$ en (11), vemos que

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(n\pi x). \tag{12}$$

Por lo tanto, es deseable saber cuando una funcion $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ tiene una expresión de la forma (12).

En su estudio sobre la conducción de calor en sólidos, J. Fourier afirmó que cualquier función $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ se puede representar por su serie de Fourier:

$$f(x) \;=\; \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\, e^{2\pi i n x} \qquad \text{en donde} \qquad a_n \;=\; \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx.$$

Siguiendo una sugerencia de J.L. Lagrange, podemos obtener la expresión anterior para los coeficientes a_n al multiplicar por $e^{-2\pi i n x}$ en la expresión anterior para $f(x)$, integrar de 0 a 1, intercambiar suma e integral, y finalmente usar la ortogonalidad de la exponencial compleja.

En 1826, N.H. Abel cuestionó la validez del intercambio de suma infinita e integral en el anterior programa propuesto por Lagrange. En el Capítulo 5 demostraremos que la afirmación de Fourier es falsa, al menos para la clase de funciones continuas. Es decir, probaremos que existen funciones continuas, cuya serie de Fourier es divergente en al menos un punto.

§3. Ejercicios.

Ejercicio 13. Sea S un conjunto de números reales. Escribimos

$$b = \sup S \qquad \text{(el supremo de } S\text{)}$$

siempre que se satisfagan las siguientes condiciones.

(a) Para cada $x \in S$, se cumple $x \leq b$.

(b) Si $a < b$, entonces existe $x \in S$ tal que $a < x$.

Suponga que todo conjunto acotado superiormente tiene un supremo. Pruebe que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

Ejercicio 14. Sea $A = \{a_n\}$ una sucesión acotada de números reales. Demuestre que existe una subsucesión convergente de A.

Ejercicio 15. Pruebe que una sucesión de números reales converge si y sólo si es de Cauchy.

Ejercicio 16. El límite superior $\limsup_{n\to\infty} a_n$, de una sucesión $\{a_n\}$ es el mayor de todos los puntos de acumulación de $\{a_n\}$. Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{k\geq n} a_k\right].$$

El límite inferior se define de manera similar. Enuncie y demuestre la proposición correspondiente al límite inferior.

Ejercicio 17. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y sea

$$\sigma_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Entonces $\liminf_{n\to\infty} a_n \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \sigma_n \;\le\; \limsup_{n\to\infty} \sigma_n \;\le\; \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 18. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbf{R}$ se cumple que la siguiente serie es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\Big)^{\alpha}.$$

Ejercicio 19. Demuestre que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha}}$$

converge para todo $\alpha > 1$ y diverge si $0 < \alpha \le 1$.

Ejercicio 20. Suponga que la serie $\sum a_n z^n$ tiene un radio de convergencia $r > 0$. Sea $A > 1/r$. Entonces existe $C > 0$ tal que para toda n se cumple que $|a_n| \le C \cdot A^n$.

Ejercicio 21. Si $a_n \ge 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;<\; \infty$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,\big(a_n\big)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Ejercicio 22. Sea $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la función definida mediante

$$f(x) \;=\; \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \le 0. \end{cases}$$

Pruebe que f es infinitamente diferenciable y que $f^{(n)}(0) = 0$ para cada $n \in \mathbf{N}$.

Ejercicio 23. Si $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ es una función continua, entonces f es uniformemente continua, es decir, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$

tal que para todo $x, y \in [0,1]$, la condición $|x-y| < \delta$, implica que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Ejercicio 24. Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Pruebe que $f(x)$ es acotada.

Ejercicio 25. Sea $f:(0,1) \to \mathbf{R}$. Entonces f es continua si y sólo si para cada número α los conjuntos $\{x : f(x) > \alpha\}$ y $\{x : f(x) < \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 26. Sea $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ una función diferenciable. Suponga que

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0 \qquad \text{para} \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Pruebe que f sólo puede tener un número finito de ceros.

Ejercicio 27. Suponga que $f(x)$ es una función continua y no negativa definida en $[0,1]$ y tal que $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Demuestre que $f(x) = 0$ para toda $x \in [0,1]$.

Ejercicio 28. Sea $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ una función no negativa tal que $\int_0^\infty f(x)\, dx < \infty$. Suponga que $|f'(x)| \leq 1$. Pruebe que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Ejercicio 29. Sea $f:[0,\infty) \to \mathbf{R}$ una función uniformemente continua con la propiedad de que $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\, dx$ existe y es finito. Pruebe que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Ejercicio 30. Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Sea M el máximo de $f(x)$. Pruebe que

$$M = \lim_{n\to\infty} \left\{ \int\limits_a^b \left|f(x)\right|^n dx \right\}^{\frac{1}{n}}.$$

Ejercicio 31. Pruebe que para cada $|x| \leq 1/2$, se cumple que

$$x - x^2 \ \leq \ \log(1+x) \ \leq \ x.$$

Suponga que $a_n > -1$, para cada $n \in \mathbf{N}$ y que la serie $\sum a_n$ converge absolutamente. Pruebe que el límite

$$\lim_{M \to \infty} \prod_{n=1}^{M} (1 + a_n)$$

existe y es distinto de cero.

Ejercicio 32. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales que converge a cero. Pruebe que existe una sucesión $\{\epsilon_n\}$ con $\epsilon_n = \pm 1$ y tal que la serie $\sum \epsilon_n a_n$ es convergente.

Capítulo 2
CONVERGENCIA UNIFORME

§1. Propiedades Básicas.

En esta sección definimos primero el concepto de sucesión de funciones uniformemente convergente. Después veremos cómo la convergencia uniforme permite intercambiar distintos procesos de límite.

Definición 1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto E. Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f, si para cada $\epsilon > 0$ existe N, tal que $n > N$ implica que para cada $x \in E$, se cumple $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. $\square$

Teorema 2. *Sea $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a f. Entonces f es continua en* $[0,1]$.

Demostración. Sea $x \in [0,1]$. Sea $\epsilon > 0$. Nótese que

$$|f(x) - f(y)| \;\le\; \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(I)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(y)|}_{(II)} + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_{(III)}.$$

Puesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente, entonces existe n tal que $|f(u) - f_n(u)| \le \epsilon/3$ para cada $u \in [0,1]$. Por lo tanto, los términos (I) y (III) son cada uno menores que $\epsilon/3$. Puesto que f_n es continua en x, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica que el término (II) también es menor que $\epsilon/3$. $\blacksquare$

Teorema 3. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que convergen uniformemente a la función integrable f en* $[0,1]$. *Entonces,*

$$\int_0^1 f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Demostración. Es claro que

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 f_n(x)\,dx \right| \le \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|\,dx < \epsilon$$

si n es suficientemente grande. ∎

Teorema 4. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones. Suponga que*

(a) *Cada f_n es diferenciable en $(0,1)$.*
(b) *Cada f_n' es continua.*
(c) *Existe $a \in (0,1)$ tal que $\{f_n(a)\}$ es convergente.*
(d) *La sucesión $\{f_n'\}$ converge uniformemente en cada subintervalo cerrado de $(0,1)$.*

Bajo estas condiciones, $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subinterbalo cerrado a un límite f. La función límite f, es diferenciable en $(0,1)$. La sucesión $\{f_n'\}$, converge uniformemente a f' en cada subintervalo cerrado contenido en $(0,1)$.

Demostración. Para cada $x \in (0,1)$, sea

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Sea $b = \lim_{n\to\infty} f_n(a)$. Entonces,

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left\{ f_n(x) - f_n(a) \right\} = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - b.$$

Por lo tanto, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe y además,

$$f(x) = b + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Tomando derivadas, obtenemos que

$$f'(x) \;=\; g(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

La convergencia $f_n' \to f'$ es uniforme en subintervalos cerrados de $(0,1)$ debido a la hipótesis **(d)** del teorema. Para verificar que $f_n \to f$ uniformemente en $[c,d] \subset (0,1)$, suponga que $a, x \in [c,d]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \big|f_n(x) - f(x)\big| \;&=\; \left| \int_a^x f_n'(t)\,dt + f_n(a) - \int_a^x f'(t)\,dt - f(a) \right| \\ &\le\; \int_c^d \big|f_n'(t) - f'(t)\big|\,dt + \big|f_n(a) - f(a)\big|. \;\blacksquare \end{aligned}$$

Aplicaremos ahora los resultados básicos sobre la convergencia uniforme para construir un ejemplo de función continua pero no diferenciable.

Ejemplo 5. Para cada $x \in \mathbf{R}$, sea $\lambda(x)$ la distancia de x al conjunto de los enteros, de modo que $\lambda(x) = \min\big\{|x-n| \,:\, n \in \mathbf{Z}\big\}$. Nótese que $\lambda(x)$ es una función periódica y que

$$\lambda(x) \;=\; \begin{cases} \;\;x & \text{si } 0 \le x \le 1/2, \\ 1-x & \text{si } 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Por lo tanto $0 \le \lambda(x) \le 1/2$ para cada $x \in \mathbf{R}$. Para cada $n \in \mathbf{N} \cup \big\{0\big\}$, sea

$$f_n(x) \;=\; \frac{1}{2^n}\,\lambda\big(2^n x\big).$$

Definimos ahora la función $g\colon[0,1] \to \mathbf{R}$, mediante

$$g(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Puesto que $0 \leq f_n(x) \leq 1/2^{n+1}$, entonces la serie que define a $g(x)$ converge uniformemente. Puesto que cada $f_n(x)$ es una función continua, entonces $g(x)$ también es continua.

Si $k \geq n$ y $j \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$, entonces

$$f_k\Big(\frac{j}{2^n}\Big) \;=\; \frac{1}{2^k}\,\lambda\big(j\,2^{k-n}\big) \;=\; 0$$

ya que $j\,2^{k-n} \in \mathbf{Z}$. Por lo tanto, si $u = j/2^n$, entonces

$$g(u) \;=\; f_0(u) + f_1(u) + \cdots + f_{n-1}(u).$$

Ahora podemos probar que g no es diferenciable en ningún punto. Sea $x \in [0,1]$ y sean $u_n = j/2^n$ y $v_n = (j+1)/2^n$, con $n \in \mathbf{Z}$, números tales que $u_n \leq x < v_n$. Es claro que

$$\lim_{n\to\infty} u_n \;=\; \lim_{n\to\infty} v_n \;=\; x.$$

Puesto que u_n y v_n son ambos de la forma u considerada más arriba, entonces

$$(\mathbf{6}) \qquad \frac{g(v_n) - g(u_n)}{v_n - u_n} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k(v_n) - f_k(u_n)}{v_n - u_n}.$$

Cada cociente

$$\frac{f_k(v_n) - f_k(u_n)}{v_n - u_n} \;\in\; \{1, -1\},$$

y por lo tanto (6) no converge cuando $n \to \infty$. Esto último prueba que $g'(x)$ no existe. En efecto, si $g'(x)$ existe, entonces

$$(\mathbf{7}) \qquad \frac{g(v_n) - g(u_n)}{v_n - u_n} = \lambda_n\Big(\frac{g(v_n) - g(x)}{v_n - x} - g'(x)\Big)$$

$$+ (1 - \lambda_n)\Big(\frac{g(u_n) - g(x)}{u_n - x} - g'(x)\Big) + g'(x),$$

en donde,

$$\lambda_n \;=\; \frac{v_n - x}{v_n - u_n}.$$

Puesto que $0 \leq \lambda_n \leq 1$, entonces la existencia de $g'(x)$ implica que los primeros términos en el lado derecho de (7) tienden a cero y por lo tanto, el cociente diferencial en el lado izquierdo de (7) converge a $g'(x)$. $\square$

§2. Sucesiones de Dirac.

En esta sección vamos a definir primero las sucesiones de Dirac. Un caso particular de sucesión de Dirac considerada por E. Landau nos permitirá probar el teorema de Wierestrass sobre la aproximación uniforme de funciones continuas mediante polinomios algebraicos.

Consideremos primero un caso muy simple de sucesión de Dirac.

Ejercicio 8. Para cada número entero positivo n, defina

$$\delta_n(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } \ |x| \;<\; \dfrac{1}{n}, \\[2ex] 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $f\colon[-1,1] \to \mathbf{R}$ una función acotada y continua en $x = 0$. Pruebe que

$$f(0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} f(x)\,\delta_n(x)\,dx.$$

Solución. Nótese que $\delta_n(x) \geq 0$ para cada x y que $\int_{-1}^{+1} \delta_n(x)\,dx = 1$. Ahora bien,

$$\left| f(0) - \int_{-1}^{+1} f(x)\,\delta_n(x)\,dx \right| \;=\; \left| \int_{-1/n}^{+1/n} \big(f(0) - f(x)\big)\delta_n(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_{-1/n}^{+1/n} |f(0) - f(x)|\delta_n(x)\,dx \leq \sup_{|x|\leq 1/n} |f(0) - f(x)| \;\to\; 0$$

cuando $n \to \infty$. ∎

Ejercicio 9. Para $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbf{N}$, se cumple que $(1-x)^n \geq 1-nx$.

Teorema 10. (K. Weierstrass). *Sea $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbf{R}$ una función continua. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un polinomio $p(x)$ tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ para cada $|x| \leq 1/2$.*

Demostración. Supondremos sin perder generalidad que $f(x)$ es continua en todo $\mathbf{R}$ y se anula en $|x| \geq 1/2$. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea

$$(\mathbf{11}) \qquad k_n(x) \;=\; \begin{cases} c_n(1-x^2)^n & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

en donde c_n es tal que

$$(\mathbf{12}) \qquad \int_{-1}^{+1} k_n(x)\,dx \;=\; 1 \qquad \text{para cada } n.$$

Para cada $|x| \leq 1/2$, sea

$$p_n(x) \;=\; \int_{-1}^{+1} f(x-t)\,k_n(t)\,dt \;=\; \int_{-1}^{+1} f(t)\,k_n(x-t)\,dt.$$

Es claro que p_n es un polinomio de grado $2n$. Puesto que se cumple (12), entonces

$$|f(x) - p_n(x)| \;\leq\; \int_{-1}^{+1} |f(x) - f(x-t)|\,k_n(t)\,dt.$$

Sea $\delta > 0$. Consideremos la última integral primero sobre el conjunto $|t| \leq \delta$. Puesto que f es uniformemente continua, entonces

$$\int_{|t|\leq\delta} |f(x) - f(x-t)|\, k_n(t)\, dt \;\leq\; \frac{\epsilon}{2} \int_{-1}^{+1} k_n(t)\, dt \;=\; \frac{\epsilon}{2}$$

siempre que δ sea suficientemente pequeño.

Por otro lado,

$$\frac{1}{c_n} \;=\; \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n\, dx \;=\; 2\int_{0}^{1} (1-x^2)^n\, dx$$

$$\geq\; 2 \int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n\, dx \;\geq\; 2 \int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\, dx \;=\; \frac{4}{3\sqrt{n}},$$

y por lo tanto $c_n < \sqrt{n}$. Si $M = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$, entonces

$$\int_{|t|\geq\delta} |f(x) - f(x-t)|\, k_n(t)\, dt \;\leq\; 2M \int_{|t|\geq\delta} k_n(t)\, dt$$

$$\leq\; 4M\sqrt{n} \int_{\delta}^{1} (1-x^2)^n\, dx \;\leq\; 4M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n \;\to\; 0$$

si $n \to \infty$. Esto termina la prueba. ∎

Definición 13. Sean f y g dos funciones de variable real. La convolución $f * g$, es la función

$$(f*g)(x) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

definida para cada $x \in \mathbf{R}$. Escribiremos $f * g(x)$ en lugar de $(f * g)(x)$. $\square$

Definición 14. Una sucesión de Dirac en $\mathbf{R}$ es una sucesión de funciones $k_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, que satisfacen las siguientes propiedades.

(a) $k_n(t) \geq 0$ para cada $n \in \mathbf{N}$ y $t \in \mathbf{R}$.
(b) Si $n \in \mathbf{N}$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(t)\, dt = 1$.
(c) Para cada par ϵ, δ de números positivos, existe N tal que

$$\int\limits_{|t| \geq \delta} k_n(t)\, dt \; < \; \epsilon \qquad \text{siempre que} \qquad n \geq N. \ \square$$

La sucesión $\{\delta_n\}$ del Ejemplo 8 y la sucesión de funciones (12) son ejemplos de sucesiones de Dirac. Para la demostración del siguiente teorema, se debe proceder como en el Ejemplo 8 y el Teorema 10.

Teorema 15. *Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función continua y acotada. Sea $E \subset \mathbf{R}$ un intervalo compacto. Sea $\{k_n\}$ una sucesión de Dirac. Entonces $k_n * f$ converge uniformemente a f en E.*

Los dos ejemplos que siguen muestran aplicaciones del concepto de convolución.

Ejemplo 16. (S.D. Poisson). Para cada $0 < r < 1$ y cada $\theta \in \mathbf{R}$, sea

$$P_r(\theta) \; = \; \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Entonces $\{P_r\}$ es una familia de Dirac para $r \to 1^-$. Sea

$$\nabla^2 u \; = \; \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

el operador de Laplace en coordenadas polares. Es fácil ver que $\nabla^2 P_r(\theta) = 0$. Sea $f(\theta)$ una función decente y periódica de período 2π. Tomando derivadas dentro de la integral, se obtiene

$$\nabla^2\big(P_r * f\big) \;=\; \big(\nabla^2 P_r\big) * f \;=\; 0.$$

Por lo tanto, $P_r * f(\theta)$ es una solución a la ecuación $\nabla^2 u = 0$ con valores a la frontera $f(\theta)$. □

Ejemplo 17. (K. Weierstrass). Para cada $t > 0$ y cada $x \in \mathbf{R}$, sea

$$K_t(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-x^2/4t}.$$

Entonces $\{K_t\}$ es una familia de Dirac para $t \to 0$. Puesto que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \;=\; 0,$$

entonces $K_t * f$ es una solución al problema de difución con valores iniciales $f(x)$. □

En el siguiente ejercicio se bosqueja la demostración original de Weierstrass a su teorema de aproximación.

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función continua que se anula en $|x| \geq 1/2$. Sea K_t el núcleo de Weierstrass definido en el Ejemplo 17. Pruebe que $K_t * f$ es una función analítica. Pruebe que los polinomios de Taylor de $K_t * f$ aproximan a f uniformemente.

En lo que resta de esta sección, nos ocuparemos de las nociones más básicas del análisis de Fourier.

Ejemplo 19. Para cada $n \in \mathbf{N}$ y cada $x \in \mathbf{R}$, sea

$$F_n(x) \;=\; 1 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(1 - \frac{j}{n}\Big)\cos(2\pi jx).$$

Entonces,

$$F_n(x) \;=\; \frac{1}{n}\Big(\frac{\operatorname{sen}\pi nx}{\operatorname{sen}\pi x}\Big)^2.$$

En efecto, escribiendo $A = 2\pi x$, obtenemos

$$nF_n(x) \;=\; \sum_{|j|<n}\big(n - |j|\big)\, e^{ijA}$$

$$= \big(1+e^{iA}+e^{2iA}+\cdots+e^{(n-1)iA}\big)\cdot\big(1+e^{-iA}+e^{-2iA}+\cdots+e^{-(n-1)iA}\big)$$

$$= \frac{1-e^{inA}}{1-e^{iA}}\cdot\frac{1-e^{-inA}}{1-e^{-iA}} \;=\; \left|\frac{1-e^{inA}}{1-e^{iA}}\right|^2 \;=\; \left|\frac{e^{in\frac{A}{2}} - e^{-in\frac{A}{2}}}{e^{i\frac{A}{2}} - e^{-i\frac{A}{2}}}\right|^2. \quad \square$$

Ejercicio 20. Pruebe que la sucesión $\{F_n\}$ es una sucesión de Dirac.

Teorema 21. (L. Fejer). *Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función periódica de período 1. Para cada $j \in \mathbf{Z}$, sea*

$$c_j \;=\; \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi ijx}\, dx. \tag{22}$$

Suponga que $f(x)$ es continua en $x = a$. Se cumple entonces que

$$f(a) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{|j|<n}\Big(1 - \frac{|j|}{n}\Big)\, c_j\, e^{2\pi ijx}.$$

Ejercicio 23. Suponga que la serie convergente $\sum a_n$ tiene términos positivos y decrecientes. Pruebe que $n \cdot a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 24. (E. Césaro). Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \;=\; A$.

Teorema 25. *Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función periódica de período 1. Para cada $j \in \mathbf{Z}$, sea c_j como en (22). Suponga que*

$$\lim_{|j|\to\infty} j\,c_j \;=\; 0.$$

Entonces, para cada $x \in \mathbf{R}$, se cumple que

$$f(x) \;=\; \sum_{j\in\mathbf{Z}} c_j\, e^{2\pi i j x}.$$

Demostración. Puesto que $j\,c_j \to 0$ cuando $|j| \to \infty$, entonces

$$\frac{1}{N}\sum_{|j|<N} |j| a_j \;\to\; 0 \qquad \text{cuando} \qquad N \to \infty. \;\blacksquare$$

§3. La Generalización de Stone.

En esta sección vamos a considerar una generalización de gran alcance al teorema de aproximación de Wierstrass.

Definición 26. Una familia $\mathcal{A}$ de funciones $f : E \to \mathbf{R}$ se llama un álgebra de funciones, si se cumplen las condiciones

(a) $f + g \in \mathcal{A}$,
(b) $f \cdot g \in \mathcal{A}$,
(c) $c f \in \mathcal{A}$,

siempre que $f, g \in \mathcal{A}$ y $c \in \mathbf{R}$. $\square$

Ejemplo 27. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales es un álgebra. □

Ejercicio 28. Suponga que $f_n \to f$ y que $g_n \to g$ uniformemente en el intervalo semiabierto $(0,1]$. Pruebe que no necesariamente se cumple que $f_n\, g_n \to f\, g$ uniformemente en E.

Definición 29. Por la cerradura de $\mathcal{A}$ entenderemos el conjunto $\mathcal{A}^*$ de todas las funciones $f\colon E \to \mathbf{R}$, para las cuales existe $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$, tal que $f_n \to f$ uniformemente en E.

Observación. Sea E un conjunto compacto. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones continuas definidas en E, entonces $\mathcal{A}^*$ también lo es. Nótese además que $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^*$.

Definición 30. Mediante $C(E)$ se denota el conjunto de todas las funciones continuas con dominio E. □

Ejemplo 31. El conjunto $\mathcal{A}$ de todos los polinomios con coeficientes reales, definidos en $[0,1]$, es una álgebra, cuya cerradura es el conjunto de todas las funciones continuas, esto es, $\mathcal{A}^* = \mathrm{C}[0,1]$. □

Definición 32. Se dice que un álgebra $\mathcal{A}$ separa puntos en E, si para cada par $x, y \in E$ tales que $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{A}$, tal que $f(x) \neq f(y)$. □

Definición 33. Se dice que un álgebra $\mathcal{A}$ no se anula en E, si para cada $x \in E$, existe $f \in \mathcal{A}$, tal que $f(x) \neq 0$. □

El siguiente ejemplo, es un álgebra de funciones que separa puntos y no se anula.

Ejemplo 34. Sea $E = [0,1] \times [0,1]$ y sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los polinomios en dos variables con coeficientes reales, definidos en E.

Lema 35. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra que separa puntos y no se anula en E. sean x, y dos elementos distintos de E. Sean $a, b \in \mathbf{R}$. Entonces existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) = a$ y $f(y) = b$.*

Demostración. Existen funciones $g, h, k \in \mathcal{A}$ tales que

$$g(x) \neq g(y), \qquad h(x) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad k(y) \neq 0.$$

Sean

$$u \;=\; gk - g(x)k \qquad \text{y} \qquad v \;=\; gh - g(y)h.$$

Entonces $u \in \mathcal{A}$, $v \in \mathcal{A}$ y además $u(x) \;=\; v(y) \;=\; 0$,

$$u(y) \;=\; k(y)\big(g(y) - g(x)\big) \;\neq\; 0 \quad \text{y} \quad v(x) \;=\; h(x)\big(g(x) - g(y)\big) \;\neq\; 0.$$

La función

$$f \;=\; \frac{av}{v(x)} + \frac{bu}{u(y)} \;\in\; \mathcal{A}$$

tiene las propiedades indicadas. ∎

Teorema 36. (M. Stone). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de funciones reales, continuas y definidas en un conjunto compacto E. Suponga que $\mathcal{A}$ separa puntos y no se anula en $\mathcal{A}$. Entonces la cerradura de $\mathcal{A}$ es igual al conjunto de todas las funciones continuas en E, esto es, $\mathcal{A}^* = C(E)$.*

Demostración. La prueba es en 4 partes.

Parte 1. $f \in \mathcal{A}^*$ implica $|f| \in \mathcal{A}^*$. En efecto, sea $a = \sup_{x \in E} |f(x)|$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces existen números reales $c_1, \ldots, c_n$, tales que

$$\Big| \sum_{j=1}^{n} c_j\, y^j - |y| \Big| \;<\; \epsilon$$

para cada $y \in [-a, a]$. Puesto que $\mathcal{A}^*$ es un álgebra, entonces

$$g \;:=\; \sum_{j=1}^{n} c_j\, f^j \;\in\; \mathcal{A}^*.$$

Por lo tanto

$$\big|g(x) - |f(x)|\big| \;<\; \epsilon \qquad\qquad \text{para cada } \; x \in E$$

implica que $|f| \in (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^*$.

Parte 2. Si $f, g \in \mathcal{A}^*$, entonces $\max(f, g) \in \mathcal{A}^*$ y $\min(f, g) \in \mathcal{A}^*$. En efecto,

$$\max(f, g) \;=\; \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \qquad \text{y} \qquad \min(f, g) \;=\; \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Parte 3. Si $f : E \to \mathbf{R}$ es continua, $x \in E$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $g_x \in \mathcal{A}^*$ tal que $g_x(x) = f(x)$ y

$$g_x(t) \;>\; f(t) - \epsilon \qquad\qquad \text{para todo } \; t \in E.$$

En efecto, para cada $y \in E$, existe $h_y \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ tal que

$$h_y(t) \;=\; f(x) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad h_y(y) \;=\; f(y).$$

Puesto que h_y es continua, entonces existe un conjunto abierto J_y que contiene a y, tal que

$$h_y(t) \;>\; f(t) - \epsilon \qquad\qquad \text{para todo } \; t \in J_y.$$

Puesto que E es compacto, entonces existen puntos $y_1, \ldots, y_n$, tales que

$$E \;\subset\; J_{y_1} \cup \cdots \cup J_{y_n}.$$

Sea $g_x = \max(h_{y_1}, \ldots, h_{y_n})$.

Parte 4. Si $f : E \to \mathbf{R}$ es una función continua y $\epsilon > 0$, entonces existe $h \in \mathcal{A}^*$ tal que

$$|f(x) - h(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo } x \in E.$$

En efecto, para cada $x \in E$, sea g_x la función construida en la Parte 3. Puesto que g_x es continua, entonces existe un conjunto abierto V_x que contiene a x y tal que

$$g_x(t) < f(t) + \epsilon \qquad \text{para todo } t \in V_x.$$

Existen puntos $x_1, \ldots x_m$, tales que

$$E \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}.$$

Sea $h = \min(g_{x_1}, \ldots, g_{y_m})$. Entonces $h \in \mathcal{A}^*$ y además

$$f(t) - \epsilon < h(t) < f(t) + \epsilon \qquad \text{para todo } x \in E. \blacksquare$$

§4. Compacidad Sequencial en $C(E)$.

Ahora estudiaremos la compacidad sequencial de conjuntos de funciones continuas.

Definición 37. La sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en E es puntualmente acotada, si existe $\phi : E \to \mathbf{R}$ tal que

$$|f_n(x)| < \phi(x) \qquad \text{para todo } x \in E \text{ y } n \in \mathbf{N}.$$

En el caso más estricto de que exista $M > 0$ tal que

$$|f_n(x)| \; < \; M \qquad\quad \text{para todo } \; x \in E \; \text{ y } \; n \in \mathbf{N},$$

decimos que $\{f_n\}$ es uniformemente acotada. □

Definición 38. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ es equicontinua, si se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica

$$|f_n(x) - f_n(y)| \; < \; \epsilon \qquad\quad \text{para todo } \; n \in \mathbf{N}. \; □$$

Teorema 39. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones puntualmente acotada y definida en un conjunto numerable E. Entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para cada $x \in E$.*

Demostración. Sea $\{x_j \; : \; j \in \mathbf{N}\}$ la sucesión de elementos de E. Puesto que $\{f_n(x_1)\}$ está acotada, entonces existe una subsucesión $\{f_{1,k} \; : \; k \in \mathbf{N}\} \subset \{f_n\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{1,k}(x_1)$ existe.

Puesto que $\{f_n(x_2)\}$ está acotada, entonces existe una subsucesión $\{f_{2,k} \; : \; k \in \mathbf{N}\} \subset \{f_{1,k}\}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2,k}(x_2)$ existe.

Este proceso se puede repetir de manera indefinida para obtener el siguiente conjunto de sucesiones

$$\begin{array}{lllll} S_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \cdots \\ \\ S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \cdots \\ \\ S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \cdots \end{array}$$

Entonces la sucesión diagonal $\{f_{j,j} \; : \; j \in \mathbf{N}\}$ converge en cada $x_j \in E$. ∎

Ejercicio 40. Demuestre que todo espacio métrico compacto E contiene un subconjunto denso y numerable.

Sugerencia. Para cada $n \in \mathbf{N}$, existe una familia finita de vecindades de radio $1/n$ que cubre a E.

Teorema 41. (Arzela-Ascoli). *Sea E un conjunto compacto. Sea $\{f_n\}$ una sucesión equicontinua y puntualmente acotada en E. Entonces*

(a) $\{f_n\}$ *es uniformemente acotada en E.*

(b) $\{f_n\}$ *contiene una subsucesión uniformemente convergente.*

Demostración. Para cada $x \in E$, sea

$$h(x) \;=\; \sup_n |f_n(x)| \;<\; \infty.$$

Puesto que E es compacto, entonces es suficiente si probamos que $h : E \to \mathbf{R}$ es continua. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que $\{f_n\}$ es equicontinua, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica

$$|f_n(x)| - |f_n(y)| \;\leq\; |f_n(x) - f_n(y)| \;<\; \epsilon,$$

o bien,

$$|f_n(x)| \;<\; |f_n(y)| + \epsilon.$$

Tomando el supremo sobre n, se obtiene que

$$h(x) \;\leq\; h(y) + \epsilon.$$

Por simetría, tenemos que

$$h(y) \;\leq\; h(x) + \epsilon.$$

Por lo tanto, $|h(x) - h(y)| \leq \epsilon$ siempre que $|x - y| < \delta$.

Para probar la segunada afirmación del teorema, sea $\{x_j\} \subset E$ un subconjunto denso y numerable de E. Entonces existe una subsucesión $\{g_n\} \subset \{f_n\}$ que converge en cada punto de $\{x_j\}$.

Para probar que $\{g_n\}$ converge en cada $x \in E$, sea $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica

$$|g_n(x) - g_n(y)| \; < \; \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{para todo } \; n \in \mathbf{N}.$$

Sea x_j tal que $|x - x_j| < \delta$. Entonces $|g_n(x) - g_m(x)|$ no es mayor que

$$|g_n(x) - g_n(x_j)| + |g_n(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_m(x)| \; < \; \epsilon$$

siempre que $m, n \geq N_j$, en donde N_j es tan grande que

$$|g_n(x_j) - g_m(x_j)| \; \leq \; \frac{\epsilon}{3}.$$

Puesto que E es compacto, entonces un número finito de vecindades $\{x \,:\, |x - x_j| \leq \delta\}$ cubren a E. Tomando el máximo de las N_j, vemos que la convergencia es uniforme. ∎

Definición 42. Sea E un conjunto compacto. Sea $C(E)$ el cunjunto de todas las funciones continuas definidas en E. Escribimos

$$||f|| \; = \; \max_{x \in E} |f(x)|. \;\; \square$$

Ejercicio 43. Sea $I = [0, 1]$. Sea $k \colon I \times I \to \mathbf{R}$ una función continua. Defina $T : C(I) \to C(I)$ mediante $Tf(x) = \int_0^1 f(t)\, k(x, t)\, dt$. Un conjunto $\mathcal{B} \subset C(I)$ es acotado, si existe $M > 0$ tal que $||f|| \leq M$ para cada $f \in \mathcal{B}$. Muestre que T mapea conjutos acotados en conjuntos equicontinuos.

§5. Ejercicios.

Ejercicio 44. Para cada $x \in [0,1]$, sean

$$f_n(x) \;=\; x^n - x^{n+1} \qquad \text{y} \qquad g_n(x) \;=\; x^n - x^{2n}.$$

Decir si las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente en $x \in [0,1]$.

Ejercicio 45. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en un $c \in \mathbf{R}$. Suponga que $f_n \to f$ uniformemente en una vecindad de c. Pruebe que f es continua en c.

Ejercicio 46. Demuestre que cada una de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n(1-x)$$

convergen en $[0,1]$ pero sólo una converge uniformemente.

Ejercicio 47. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función uniformemente continua. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea

$$f_n(x) \;=\; f\big(x + \frac{1}{n}\big).$$

Pruebe que f_n converge uniformemente a f en $\mathbf{R}$. ¿Se cumple lo anterior si f es sólo continua?

Ejercicio 48. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales, tal que $a_n \to a \in \mathbf{R}$. Sea $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a f. Pruebe que $f_n(a_n) \to f(a)$.

Ejercicio 49. Pruebe que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^2 + n}{n^2}$$

es uniformemente convergente en $[-a, a]$ para cada $a \in \mathbf{R}$. Pruebe que para ningún valor de x, se cumple que la serie sea absolutamente convergente.

Ejercicio 50. Pruebe que la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{jx^2}{j^3 + x^3}$$

converge uniformemente en el intervalo $[0, c]$ para cada $c > 0$. Pruebe que la serie no converge uniformemente en $[0, \infty)$.

Solución. La convergencia uniforme se sigue de $jx^2/(j^3 + x^3) \leq c^2/j^2$ para cada $x \in [0, c]$. Si $x = j$ entonces $jx^2/(j^3 + x^3) = 1/2$ y por lo tanto la serie no puede ser uniformemente convergente en $[0, \infty]$. ∎

Ejercicio 51. Sea $S \subset \mathbf{R}$. Sea $g_n : S \to \mathbf{R}$ una sucesión de funciones tal que $0 \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para cada $n \in \mathbf{N}$ y cada $x \in S$. Suponga que $g_n(x) \to 0$ uniformemente en S. Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, g_n(x)$$

converge uniformemente en S.

Ejercicio 52. Sea $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función continua, tal que $g(0) = 0$. Suponga que g' existe y esta acotada, es decir,

$$\sup\left\{|g'(x)| \;:\; x \in \mathbf{R}\right\} \;=\; M \;<\; \infty.$$

Pruebe que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, g\big(\frac{x}{n}\big)$$

converge para cada $x \in \mathbf{R}$. Pruebe además, que la serie anterior define una función continua de x.

Ejercicio 53. Para cada número entero positivo n, defina

$$\delta_n^1(x) \;:=\; \begin{cases} -n^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1/n, \\ n^2 & \text{si } -1/n < x < 0, \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro} \quad \text{caso.} \end{cases}$$

Sea $f:[-1,1] \to \mathbf{R}$ una función con segunda derivada continua. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} f(x)\cdot\delta_n^1(x)\, dx.$$

Calcular el límite anterior para el caso de que $f(x) = |x|$.

Ejercicio 54. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ una función acotada. Demuestre que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t}\, f(t)\, dt \;=\; \lim_{t\to\infty} f(t)$$

siempre que la integral en el lado derecho y el límite en el lado izquierdo existan.

Ejercicio 55. Sea f una función continua en $[0,1]$. Evaluar los límites

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n\, f(x)\, dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n\, f(x)\, dx.$$

Ejercicio 56. Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[a,b]$ se dice que pertenece a la clase Lipschitz, $\mathrm{Lip}_M(\alpha)$, con exponente α y constante M, si para cada $a \le x < y \le b$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \ \le \ M \cdot |x-y|^{\alpha}.$$

Se dice que $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ siempre que $f(x) \in \mathrm{Lip}_M(\alpha)$ para alguna constante M.

(a) Construya una función en $[0,1/2]$ que no pertenesca a la clase $\mathrm{Lip}(1)$.

(b) Sea $\alpha \in (0,1)$ fijo. Construya una función en $[0,1/2]$ que no pertenesca a la clase $\mathrm{Lip}(\alpha)$.

Ejercicio 57. Sea $f(x)$ una función periódica de período 1. Sea

$$\sigma_n^f(x) \ = \ \frac{1}{n} \int_{-1/2}^{+1/2} f(x-t) \Big(\frac{\operatorname{sen} \pi n t}{\operatorname{sen} \pi t} \Big)^2 \, dt.$$

Suponga que f pertenece a la clase $\mathrm{Lip}_M(\alpha)$ con $\alpha \in (0,1)$. Demuestre que existe una constante absoluta C tal que

$$||f - \sigma_n^f|| \ \le \ \frac{C \cdot M}{n^{\alpha}}.$$

Solución. Es fácil verificar que

$$
\begin{aligned}
|f(x)-\sigma_n^f(x)| \;&\leq\; \frac{1}{n}\int\limits_{-1/2}^{+1/2} |f(x)-f(x-t)| \left(\frac{\operatorname{sen}\pi nt}{\operatorname{sen}\pi t}\right)^2 dt \\
&\leq\; \frac{2M}{n}\int\limits_{0}^{1/2} t^{\alpha} \left(\frac{\operatorname{sen}\pi nt}{\operatorname{sen}\pi t}\right)^2 dt.
\end{aligned}
$$

Sea $0<\delta<\dfrac{1}{2}$. Estudiemos la integral

$$
I_2 \;:=\; \frac{1}{n}\int\limits_{\delta}^{1/2} t^{\alpha} \left(\frac{\operatorname{sen}\pi nt}{\operatorname{sen}\pi t}\right)^2 dt.
$$

Puesto que $0\leq t\leq \dfrac{1}{2}$ implica que $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\pi t}\leq \dfrac{1}{2t}$ entonces tenemos

$$
I_2 \;\leq\; \frac{1}{n}\int\limits_{\delta}^{1/2} t^{\alpha-2}\,dt \;\leq\; \frac{\delta^{\alpha-1}}{n(1-\alpha)}.
$$

Estudiemos ahora la integral

$$
\begin{aligned}
I_1 \;:=\;& \frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha} \left(\frac{\operatorname{sen}\pi nt}{\operatorname{sen}\pi t}\right)^2 dt \\
=\;& \frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha}\left(n^2+O(n^4\,t^2)\right) dt \;=\; n\,\delta^{\alpha+1}+O(n^3\,\delta^{\alpha+3}).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, será suficiente si

$$
\frac{\delta^{\alpha-1}}{n} \;=\; n\delta^{\alpha+1}.
$$

Esto último ocurre cuando $\delta = \dfrac{1}{n}$. Por lo tanto

$$|f(x) - \sigma_n^f(x)| \;\leq\; \frac{2M}{n^\alpha}\,\big(\frac{1}{1-\alpha} + A\big)$$

en donde A es una constante que no depende de α, $f(x)$ o de n. ∎

Ejercicio 58. Si la función periódica f pertenece a la clase $\mathrm{Lip}_M(1)$, entonces

$$||f - \sigma_n^f|| \;\leq\; \frac{C \cdot M \log n}{n}.$$

Ejercicio 59. Sea f una función continua y periódica de período 1. Sea σ_n^f como en el Problema 57. Pruebe que si $||f - \sigma_n^f|| = o(1/n)$, entonces f es constante.

Solución. Puesto que $\sigma_n^f(x) \;=\; \displaystyle\sum_{|j|<n} \Big(1 - \frac{|j|}{n}\Big) c_j\, e^{2\pi i j x}$, entonces

$$\Big|\frac{j c_j}{n}\Big| \;=\; \Big|\int_{-1/2}^{1/2} \big(f(x) - \sigma_n^f(x)\big) e^{-2\pi i j x}\, dx\Big| \;\leq\; ||f - \sigma_n^f||.$$

Por lo tanto, $|j| > 0$ implica que $c_j = 0$. ∎

Ejercicio 60. Sea k_n una sucesión de Dirac en donde cada término es una función par. Sea f una función integrable que tiene una discontinuidad de salto en 0. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k_n(x)\, f(x)\, dx \;=\; \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}.$$

Ejercicio 61. Sea $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ una función continua. Sea $\epsilon>0$. Pruebe que existe un polinomio $p(x)$ con coeficientes racionales, tal que $|f(x)-p(x)|\le\epsilon$ para cada $x\in[0,1]$.

Ejercicio 62. Sea $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ una función continua. Suponga que $\int_0^1 x^n f(x)\,dx=0$ para $n=0,1,2,\ldots$ Demuestre que $f(x)=0$ para todo $x\in[0,1]$.

Ejercicio 63. Sea $g:[0,1]\to\mathbf{R}$ una función continua. Demuestre que existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que $p_n(x)\to g(x)$ para cada $x\in[0,1]$ pero tal que $\int_0^1 p_n(x)\,dx\to\infty$ cuando $n\to\infty$.

Ejercicio 64. Sea $f(x)$ una función continua definida en $[0,1]$. Demuestre que existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que $p_n\to f$ de manera uniforme y además $p_1(x)\le p_2(x)\le\cdots$, para cada $x\in[0,1]$.

Ejercicio 65. Sea $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ una función con derivada continua. Pruebe que existen polinomios $p_n(x)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{0\le x\le 1}\left|\,p_n(x)-f(x)\,\right|+\max_{0\le x\le 1}\left|\,\frac{d}{dx}\,p_n(x)-\frac{d}{dx}f(x)\,\right|\right\}=0.$$

Ejercicio 66. Sea E un conjunto compacto. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas. Suponga que $\{f_n\}$ converge uniformemente en E. Pruebe que $\{f_n\}$ es equicontinua.

Solución. Sea $f_0(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Puesto que E es compacto, entonces cada f_j, con $j\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, es uniformemente continua. Para $j\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, sea δ_j tal que $|x-y|<\delta_j$ implica que $|f_j(x)-f_j(y)|<\epsilon/3$. Puesto que la convergencia es uniforme, entonces existe N tal que $j>N$ implica que

$$|f_j(x)-f_0(x)|<\frac{\epsilon}{3}\qquad\text{para cada}\quad x\in E.$$

Sea $\delta = \min\left\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_N\right\}$. Supongamos que $|x-y| < \delta$. Si $j > N$ entonces

$$|f_n(x) - f_n(y)| \;\leq\; \underbrace{|f_n(x) - f_0(x)|}_{\leq\; \epsilon/3} + \underbrace{|f_0(x) - f_0(y)|}_{\leq\; \epsilon/3} + \underbrace{|f_0(y) - f_n(y)|}_{\leq\; \epsilon/3}$$

Si $j \leq N$ entonces $|x-y| < \delta$ implica $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \dfrac{\epsilon}{3} < \epsilon$. ∎

Ejercicio 67. Sea E un espacio métrico compacto y sea $\left\{f_n\right\}$ una sucesión equicontinua en $C(E)$. Si $\left\{f_n\right\}$ converge puntualmente entonces $\left\{f_n\right\}$ es uniformemente convergente.

Ejercicio 68. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones real valuadas, definidas en $[0,1]$, tales que $f(0) = 0$ y también $\int_0^1 f'(x)^2\, dx \leq 1$. Use el teorema de Arzela-Ascoli para probar que, toda sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente.

Ejercicio 69. Sea $\left\{f_n\right\}$ una sucesión equicontinua de funciones definidas en $[0,1]$. Suponga que

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_0^1 \left|f_m(x) - f_n(x)\right|^2 dx \;=\; 0.$$

Demuestre que $\left\{f_n\right\}$ converge uniformemente en $[0,1]$.

Capítulo 3

CONJUNTOS Y FUNCIONES MEDIBLES

§1. La Integral de Riemann.

Aquí repasamos brevemente la definición de integral de Riemann. Sea $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ una función real. Sea

$$\mathcal{P} \ = \ \big\{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\big\}$$

una partición de $[0,1]$. Para cada $j = 1, \ldots, n$, sean

$$m_j \ = \ \inf \big\{ f(x) \ : \ x_{j-1} \leq x \leq x_j \big\},$$

$$M_j \ = \ \sup \big\{ f(x) \ : \ x_{j-1} \leq x \leq x_j \big\}.$$

La norma de la partición $\mathcal{P}$ se define mediante $|\mathcal{P}| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$. Sean

$$\mathrm{L}f \ = \ \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \quad \text{y} \quad \mathrm{U}f \ = \ \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}).$$

Si se cumple $\mathrm{L}f = \mathrm{U}f$, entonces decimos que f es Riemann integrable y escribimos $\int_0^1 f(x)\,dx = \mathrm{U}f$. En esta definición hemos considerado una partición en el eje horizontal del plano cartesiano. Para definir la integral de Lebesgue se considerará una partición del eje vertical del plano cartesiano.

Ejercicio 1. Sea $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ una función Riemann integrable que satisface $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$. Pruebe que existe un intervalo $[a,b] \subset [0,1]$ con la propiedad de que $f(x) > 0$ para cada $x \in [a,b]$.

§2. La Integral de Lebesgue.

Sea $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ una función acotada: $|f(x)|\le M$ para cada $x\in[0,1]$. Sean

$$\mathcal{P} \;=\; \big\{ -M = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M \big\}$$

y $|\mathcal{P}| = \max\limits_{1\le j\le n}(y_j - y_{j-1})$. Para $1\le j\le n$, sea

$$E_j \;=\; \big\{ x\in[0,1] \;:\; y_{j-1} < f(x) \le y_j \big\}.$$

Para definir la integral de Lebesgue, se consideran las expresiones

$$\mathrm{L}f \;=\; \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{j=1}^{n} y_{j-1}\, m(E_j) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{U}f \;=\; \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{j=1}^{n} y_j\, m(E_j)$$

en donde $m(E_j)$ “mide la longitud total” del conjunto E_j en donde $y_{j-1} < f(x) \le y_j$ tiene lugar. En caso de que $\mathrm{L}f = \mathrm{U}f$, entonces se dice que f es integrable en el sentido de Lebesgue.

La función f puede ser muy complicada. En este caso, E_j también será muy complicado. El problema será decidir para qué conjuntos E se puede definir su “medida de longitud total” $m(E)$.

Para un conjunto $E\subset\mathbf{R}$, Lebesgue consideró

$$m^*(E) \;=\; \inf_{E\subset\mathcal{O}} m(\mathcal{O}) \qquad \text{y} \qquad m_*(E) = \sup_{K\subset E} m(K)$$

en donde $\mathcal{O}$ denota un conjunto abierto y K uno compacto. Lebesgue dijo que el conjunto E es medible, en caso de que $m^*(E) = m_*(E)$ y definió la medida de E mediante $m(E) = m^*(E)$.

En la definición de $m^*(E)$ y $m_*(E)$ debe notarse que la asignación de $m(\mathcal{O})$ y $m(K)$ a los conjuntos $\mathcal{O}$ y K, no representa ninguna dificultad ya que los conjuntos abiertos $\mathcal{O}$ y $\mathbf{R}\setminus K$ se descomponen como la unión disjunta y numerable de intervalos abiertos.

§3. Medida de Lebesgue.

Definición 2. Sea $I = (a, b)$ un intervalo abierto. Definimos $m^*(I) = b - a$. Sea A un conjunto de números reales. Definimos

$$m^*(A) \;=\; \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \;:\; A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big\}$$

en donde cada I_n es un intervalo abierto. $\square$

Observación. Si $A \subset B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$.

Proposición 3. *Sea $I \subset \mathbf{R}$ un intervalo. Entonces*

$$m^*(I) \;=\; \sup I - \inf I.$$

Demostración. Esto es claro en el caso de que I es abierto. Sea $J \subset \mathbf{R}$ un intervalo acotado. Sean J^o, $\bar{J}$ el interior y la cerradura de J. Entonces $J^o \subset J \subset \bar{J}$, y por lo tanto

$$m^*(J^o) \;\leq\; m^*(J) \;\leq\; m^*(\bar{J}).$$

Será suficiente si probamos la proposición para el caso de un intervalo cerrado $I = [a, b]$.

Nótese que la contención $(a, b) \subset [a, b]$ implica de inmediato que $m^*[a, b] \geq m^*(a, b) = b - a$. Por otra parte,

$$[a, b] \;\subset\; \big(a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2}\big)$$

y entonces

$$m^*[a, b] \;\leq\; m^*\big(a - \frac{\epsilon}{2}, b + \frac{\epsilon}{2}\big) \;=\; (b - a) + \epsilon.$$

Por lo tanto, $m^*[a,b] = b - a$. ∎

Ejercicio 4. Probar el caso $a = -\infty$ o $b = +\infty$ en la proposición anterior.

Proposición 5. *Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ una unión numerable de conjuntos $A_n \subset \mathbf{R}$. Entonces*

$$m^*(A) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

Demostración. Si existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $m^*(A_n) = \infty$, entonces ya terminamos. Supongamos que cada $m^*(A_n)$ es finito. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe una sucesión de intervalos abiertos

$$\big\{ I_{n,j} \;:\; n \in \mathbf{N},\, j \in \mathbf{N} \big\}$$

tal que para cada $n \in \mathbf{N}$ se cumple que $A_n \;\subset\; \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}$ y también que

$$\sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_{n,j}) \;\le\; m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Puesto que $A \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}$ entonces

$$m^*(A) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_{n,j}) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \big(m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \big) \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \epsilon.$$

Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces la proposición se cumple. ∎

Definición 6. Para cada $j \in \mathbf{N}$, sea $\mathcal{O}_j$ un conjunto abierto y sea C_j un conjunto cerrado. Suponga que

$$A \;=\; \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j \qquad \text{y que} \qquad B \;=\; \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j.$$

Decimos entonces que A pertenece a la clase G_δ y que B pertenece a la clase F_σ. $\square$

Ejercicio 7. Sea $A \subset \mathbf{R}$ un conjunto de números reales. Sea $\epsilon > 0$. De la definición de $m^*(A)$ es claro que existe un conjunto abierto $\mathcal{O}$, tal que $A \subset \mathcal{O}$ y además $m^*(\mathcal{O}) \leq m^*(A) + \epsilon$. Pruebe que existe $G \in G_\delta$ tal que $A \subset G$ y además $m^*(A) = m^*(G)$.

Ejercicio 8. Sea A un conjunto numerable. Pruebe que $m^*(A) = 0$.

Ejercicio 9. Pruebe que el conjunto $[0, 1]$ no es numerable.

Definición 10. (C. Carathéodory). Un conjunto E es medible si para cada conjunto A se cumple

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \widetilde{E}). \quad \square$$

Sean A y B conjuntos disjuntos, de modo que $A \cap B = \emptyset$. Para la siguiente observación tome en cuenta que la Proposición 5 implica que $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.

Observación. Para todo conjunto A, se cumple que

$$m^*(A) \ \leq \ m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \widetilde{E}).$$

Por lo tanto, un conjunto E es medible si y sólo si

$$m^*(A) \ \geq \ m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \widetilde{E}).$$

Proposición 11. *Un conjunto $E \subset \mathbf{R}$ es medible si y solamente si su complemento $\widetilde{E}$ es medible.*

Lema 12. *Si $m^*(E) = 0$, entonces E es medible.*

Demostración. Puesto que $A \supset A \cap \widetilde{E}$, entonces

$$m^*(A) \;\geq\; m^*(A \cap \widetilde{E}) \;=\; \underbrace{m^*(A \cap E)}_{\text{igual a } 0} + m^*(A \cap \widetilde{E}). \;\blacksquare$$

Lema 13. *Si E_1 y E_2 son dos conjuntos medibles, entonces también $E_1 \cup E_2$ es medible.*

Demostración. Sea A un conjunto cualquiera. Puesto que E_2 es medible, entonces

$$m^*(A \cap \widetilde{E}_1) \;=\; m^*(A \cap \widetilde{E}_1 \cap E_2) + m^*(A \cap \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2).$$

Puesto que $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap \widetilde{E}_1)$, entonces tenemos

$$m^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) \;\leq\; m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap \widetilde{E}_1).$$

Por lo tanto

$$m^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + m^*(A \cap \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2) \;\leq$$

$$m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap \widetilde{E}_1) + m^*(A \cap \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2) \;=$$

$$m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap \widetilde{E}_1) \;=\; m^*(A)$$

ya que E_1 es medible. Puesto que $(E_1 \cup E_2)^{\sim} = \widetilde{E}_1 \cap \widetilde{E}_2$, entonces tenemos que $E_1 \cup E_2$ es medible. $\blacksquare$

Lema 14. *Sea $A \subset \mathbf{R}$ un conjunto cualquiera. Sean $E_1, E_2, \ldots E_n$, conjuntos medibles y disjuntos. Entonces*

$$m^*\Big(A \cap \Big[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big]\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} m^*(A \cap E_j).$$

Demostración. La prueba es por inducción sobre n. Supongamos que el lema se cumple para $n-1$ conjuntos E_j. Puesto que los E_j son disjuntos por pares, entonces

$$A \cap \Big[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big] \cap E_n \;=\; A \cap E_n.$$

También se cumple que

$$A \cap \Big[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big] \cap \widetilde{E}_n \;=\; A \cap \Big[\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\Big].$$

Puesto que E_n es medible, entonces

$$\begin{aligned} m^*\Big(A \cap \Big[\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big]\Big) \;&=\; m^*(A \cap E_n) + m^*\Big(A \cap \Big[\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j\Big]\Big) \\ &=\; m^*(A \cap E_n) + \sum_{j=1}^{n-1} m^*(A \cap E_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 15. *El complemento de un conjunto medible es medible. La unión numerable de conjuntos medibles es medible. Si un conjunto tiene medida exterior igual a cero, entonces es medible.*

Demostración. Sea E la unión numerable de conjuntos medibles. Se puede suponer sin perder generalidad que E es la unión numerable disjunta de conjuntos medibles E_n. Si

$$F_n \;=\; \bigcup_{j=1}^{n} E_j \qquad \text{entonces} \qquad \widetilde{F}_n \;\supset\; \widetilde{E}.$$

Por lo tanto

$$m^*(A) \;=\; m^*(A\cap F_n) + m^*(A\cap \widetilde{F}_n) \;\geq\; m^*(A\cap F_n) + m^*(A\cap \widetilde{E}).$$

Entonces

$$m^*(A) \;\geq\; \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A\cap E_j) + m^*(A\cap \widetilde{E}) \;\geq\; m^*(A\cap E) + m^*(A\cap \widetilde{E}). \;\blacksquare$$

Lema 16. *El intervalo* (a,∞) *es medible.*

Demostración. Sea A un conjunto cualquiera. Sean $A_1 = A\cap(a,\infty)$ y $A_2 = A\cap(-\infty,a]$. Probaremos que $m^*(A_1)+m^*(A_2)\leq m^*(A)$. Si $m^*(A)=\infty$, entonces ya acabamos. Supongamos que $m^*(A)<\infty$. Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos abiertos tal que

$$A \;\subset\; \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \qquad \text{y además} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_j) \;\leq\; m^*(A)+\epsilon.$$

Sean $I_j' = I_j\cap(a,\infty)$ y $I_j'' = I_j\cap(-\infty,a]$. Entonces I_j' y I_j'' son intervalos tales que

$$m^*(I_j) \;=\; m^*(I_j') + m^*(I_j'').$$

Puesto que $A_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j'$, entonces

$$m^*(A_1) \;\leq\; m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j'\Big) \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_j').$$

Puesto que $A_2 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j''$, entonces

$$m^*(A_2) \ \leq \ m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j''\Big) \ \leq \ \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_j'').$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} m^*(A_1) + m^*(A_2) \ &\leq \ \sum_{j=1}^{\infty} \Big(m^*(I_j') + m^*(I_j'')\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_j) \ \leq \ m^*(A) + \epsilon. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 17. *Todo conjunto abierto es medible.*

Demostración. Para cada $j \in \mathbf{N}$ el conjunto $(b - 1/j, \infty)$ es medible. Por lo tanto, el complemento $(-\infty, b - 1/j]$ también es medible. Ahora sólo basta observar que

$$(-\infty, b) \ = \ \bigcup_{j=1}^{\infty} \Big(-\infty, \, b - \frac{1}{j} \Big] \qquad \text{y} \qquad (a, b) \ = \ (-\infty, b) \cap (a, \infty). \ \blacksquare$$

Observación. Todo conjunto cerrado es medible. Todo conjunto G_δ es medible. Todo conjunto F_σ es medible.

Teorema 18. *Sea* $\{E_j\}$ *una sucesión de conjuntos medibles. Se cumple que*

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \ \leq \ \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Si los conjuntos E_j son disjuntos por pares, entonces se da la igualdad.

Demostración. La primera afirmación es consecuencia directa de la Proposición 5. Supongamos ahora que los conjuntos E_j son disjuntos por pares. Por el Lema 14 se cumple que

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \ \geq \ m\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big) \ = \ \sum_{j=1}^{n} m(E_j).$$

Por lo tanto

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \ \geq \ \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j). \ \blacksquare$$

Ejercicio 19. Sean $A \supset B$ dos conjuntos medibles. Suponga que $m(B) < \infty$. Pruebe que $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$.

Proposición 20. *Sea $\big\{E_n\big\}$ una sucesión decreciente de conjuntos medibles: $E_{n+1} \subset E_n$. Suponga que $m(E_1) < \infty$. Entonces*

$$m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \ = \ \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Demostración. Sea $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Puesto que

$$E_1 \setminus E \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus E_{n+1})$$

y la sucesión $\big\{E_n \setminus E_{n+1}\big\}$ es disjunta, entonces

$$m(E_1) - m(E) \ = \ m(E_1 \setminus E) \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j \setminus E_{j+1})$$

$$= \ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \big(m(E_j) - m(E_{j+1})\big) \ = \ m(E_1) - \lim_{n\to\infty} m(E_n). \ \blacksquare$$

Teorema 21. *Sea $E \subset \mathbf{R}$ un conjunto. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *E es medible.*

(b) *Dado $\epsilon > 0$, existe un abierto $\mathcal{O} \supset E$ tal que $m^*(\mathcal{O} \setminus E) < \epsilon$.*

(c) *Dado $\epsilon > 0$, existe un cerrado $F \subset E$ tal que $m^*(E \setminus F) < \epsilon$.*

(d) *Existe $G \in G_\delta$ tal que $E \subset G$ y además $m^*(G \setminus E) = 0$.*

(e) *Existe $F \in F_\sigma$ tal que $F \subset E$ y además $m^*(E \setminus F) = 0$.*

En caso de que $m^*(E) < \infty$, los enunciados anteriores son equivalentes al que sigue.

(f) *Dado $\epsilon > 0$, existe una unión finita U de intervalos abiertos tal que $m^*(U \,\Delta\, E) < \epsilon$.*

Demostración. Supondremos siempre que $m^*(E) < \infty$. Para probar que **(a)** implica **(b)** sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\mathcal{O} \supset E$ tal que $m(\mathcal{O}) \le m(E) + \epsilon$. Puesto que E es medible, entonces la definición de Carathéodory implica que $m^*(\mathcal{O} \setminus E) = m^*(\mathcal{O}) - m^*(E) \le \epsilon$.

Para probar que **(b)** implica **(d)** se toman conjuntos abiertos $\mathcal{O}_n \supset E$ tales que $m(\mathcal{O}_n \setminus E) < 1/n$ y se toma $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$.

Para probar que **(d)** implica **(a)** nótese que $G \setminus E$ es medible y también que $E = G \cap (G \setminus E)^{\sim}$.

Para probar que **(a)** implica **(f)**, sea $\mathcal{O} \supset E$ un conjunto abierto tal que

$$m(\mathcal{O}) \;\le\; m(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Escribamos $\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, en donde cada I_j es un intervalo abierto. Sea n tal que

$$\sum_{j>n} m(I_j) \;<\; \frac{\epsilon}{2}.$$

Mostraremos que si $U = I_1 \cup \cdots \cup I_n$, entonces

$$m^*(U \,\Delta\, E) \;\le\; m(E \setminus U) + m(U \setminus E) \;<\; \epsilon.$$

Si $x \in U \setminus E$, entonces $x \in \mathcal{O} \setminus E$ y por lo tanto $m(U \setminus E) < \epsilon/2$. Si $x \in E \setminus U$, entonces

$$x \;\in\; \bigcup_{j>n} I_j \qquad \text{y por lo tanto} \qquad m(E \setminus U) \;<\; \frac{\epsilon}{2}. \;\blacksquare$$

§4. Funciones Medibles.

Proposición 22. *Sea $f : E \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ una función con dominio medible. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *Para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, el conjunto $\{x \,:\, f(x) > \alpha\}$ es medible.*

(b) *Para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, el conjunto $\{x \,:\, f(x) \ge \alpha\}$ es medible.*

(c) *Para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, el conjunto $\{x \,:\, f(x) < \alpha\}$ es medible.*

(d) *Para todo $\alpha \in \mathbf{R}$, el conjunto $\{x \,:\, f(x) \le \alpha\}$ es medible.*

Demostración. Que **(a)** implica **(b)** se sigue de

$$\{x \,:\, f(x) \ge \alpha\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{x \,:\, f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\Big\}.$$

Que **(b)** implica **(c)** se sigue de

$$\{x \,:\, f(x) < \alpha\} \;=\; E \setminus \{x \,:\, f(x) \ge \alpha\}.$$

Que **(c)** implica **(d)** se sigue de

$$\{x \,:\, f(x) \leq \alpha\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{x \,:\, f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\Big\}.$$

Que **(d)** implica **(a)** se sigue de

$$\{x \,:\, f(x) > \alpha\} \;=\; E \setminus \{x \,:\, f(x) \leq \alpha\}. \;\blacksquare$$

Definición 23. Una función que es como en la Proposición 22, se llama función medible. $\square$

Ejercicio 24. Sea $f : E \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ una función medible y con dominio medible. Pruebe que $\{x \,:\, f(x) = \infty\}$ es medible.

Ejercicio 25. Pruebe que toda función continua es medible.

Proposición 26. *Sean f y g dos funciones medibles con valores reales y con dominio común. Entonces $f + g$ y fg son medibles.*

Demostración. Que $f + g$ es medible se sigue de

$$\{x \,:\, f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} \{x \,:\, f(x) < r \quad \text{y} \quad g(x) < \alpha - r\}$$

en donde la unión es sobre el conjunto de los números racionales.

Para probar que fg es medible, nótese que f^2 es medible. En efecto,

$$\{x \,:\, f^2(x) > \alpha\} \;=\; \{x \,:\, f(x) > \sqrt{\alpha}\,\} \cup \{x \,:\, f(x) < -\sqrt{\alpha}\,\}$$

siempre que $\alpha \geq 0$, mientras que

$$\{x \,:\, f^2(x) > \alpha\} \;=\; \text{dominio de } \; f$$

siempre que $\alpha < 0$. Puesto que

$$fg \;=\; \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big),$$

entonces también fg es medible. ∎

Teorema 27. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces cada una de las siguientes funciones es medible:*

$$\sup_n f_n, \qquad \limsup_n f_n, \qquad \inf_n f_n, \qquad \liminf_n f_n.$$

Demostración. Que $\sup_n f_n$ es medible, se sigue de

$$\{x \,:\, \sup_n f_n(x) \leq \alpha\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \,:\, f_n(x) \;\leq\; \alpha\}.$$

Que $\limsup_n f_n$ es medible, se sigue de

$$\limsup_n f_n(x) \;=\; \inf_n \Big(\sup_{k \geq n} f_k(x)\Big). \;∎$$

Ejercicio 28. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en $[0,1]$. Pruebe que el conjunto de x tales que $\lim f_n(x)$ existe, es medible.

Teorema 29. *Sea $f : [0,1] \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ una función medible que toma los valores $\pm\infty$ sólo en un conjunto de medida cero. Sea $\epsilon > 0$.*

Entonces existen una función escalón g y una función continua h tales que

$$m\big\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\big\} < \epsilon \quad y \quad m\big\{x : |f(x) - h(x)| \geq \epsilon\big\} < \epsilon.$$

Demostración. Sea $E_n = \big\{x : |f(x)| > n\big\}$. Supongamos que $m(E_n) \geq \epsilon/2$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Puesto que $E_{n+1} \subset E_n$, entonces

$$m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} m(E_n) \;\geq\; \frac{\epsilon}{2}.$$

Puesto que esto contradice las hipótesis del teorema, entonces existe N tal que

$$m\big\{x : |f(x)| > N\big\} \;<\; \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $\delta > 0$. Sea $F_n = \big\{x : \epsilon n \leq f(x) < \epsilon(n+1)\big\}$ en donde $|n| \leq N/\epsilon$. Para cada una de estas n, existe

$$U_n \;=\; \bigcup_{j=1}^{k(n)} I_{n,j}$$

que es unión de intervalos abiertos y tal que

$$m(F_n \,\Delta\, U_n) \;<\; \frac{\delta\epsilon}{2^{|n|}}.$$

Si $x \in [0,1]$, entonces hacemos $g(x) = \epsilon n$ en caso de que exista un único n tal que $x \in U_n$. En caso contrario, hacemos $g(x) = 0$. El conjunto de $x \in [0,1]$ para las cuales $|f(x) - g(x)| \geq \epsilon$ tiene medida menor o igual que

$$m\big\{x : |f(x)| \geq N\big\} + \sum_{|n|\leq N} m(F_n \,\Delta\, U_n) \;<\; \frac{\epsilon}{2} + 4\delta\epsilon.$$

Tomando $\delta = 1/8$ se obtiene el resultado. ∎

Ejercicio 30. Sea E un conjunto de números reales. La función χ_E definida mediante

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

se llama la función indicadora (o característica) del conjunto E. Sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos contenidos en un conjunto S. Se define E^* como el conjunto de las $x \in S$ para cuales $x \in E_n$ para una infinidad de índices n. El conjunto E_* consta de todas las $x \in S$ para las cuales $x \in E_n$ para todo índice suficientemente grande. Demuestre que

$$\chi_{E_*} = \liminf_{n\to\infty} \chi_{E_n}, \qquad \chi_{E^*} = \limsup_{n\to\infty} \chi_{E_n}.$$

Por esta razón, se escribe $E^* = \limsup_{n\to\infty} E_n$ y también $E_* = \liminf_{n\to\infty} E_n$.

Ejercicio 31. Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos de S. Demuestre que

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big[\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \Big] \qquad \text{y} \qquad \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big[\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \Big].$$

Ejercicio 32. Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos medibles de $[0,1]$. Suponga que $\sum m(E_n) < \infty$. Demuestre que el conjunto de puntos que pertenecen a una infinidad de elementos de $\{E_n\}$ tiene medida cero.

Solución. Puesto que $E^* \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ para cada $n \in \mathbf{N}$, entonces

$$0 \le m(E^*) \le \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) \to 0 \quad \text{siempre que} \quad n \to \infty. \ ∎$$

Teorema 33. *Sea E un conjunto medible con medida finita. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E. Suponga que para cada $x \in E$ se cumple que $f_n(x) \to f(x)$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existen un conjunto medible $A \subset E$ y un entero N tales que $m(A) < \delta$ y además $x \in E \setminus A$ y $n \geq N$ implican $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.*

Demostración. Sin perder generalidad supondremos que $f(x) = 0$ para cada $x \in E$. Sea $E_n = \{x \,:\, |f_n(x)| \geq \epsilon\}$. Si

$$F_n \;=\; \bigcup_{k>n} E_k, \qquad \text{entonces} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \;=\; \emptyset$$

y además $F_{n+1} \subset F_n$. Por lo tanto existe N tal que $m(F_N) < \delta$. Sea $A = F_N$. Si $x \in E \setminus A$ y $n > N$, entonces $|f_n(x)| < \epsilon$. ∎

Teorema 34. (Egorov). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles que convergen a f casi en todas partes en el conjunto medible E. Dado $\delta > 0$ existe $A \subset E$ tal que $m(A) < \delta$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $E \setminus A$.*

Demostración. Por el teorema anterior, existe una sucesión $\{A_n\}$ tal que $m(A_n) < \delta/2^n$ y tal que $x \in E \setminus A_n$ implica que $|f(x) - f_j(x)| < 1/n$ para todo $j > N_n$. Sea

$$A \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Entonces $m(A) < \delta$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $E \setminus A$. ∎

§5. Ejemplos y Contraejemplos.

En el siguiente ejemplo, se construye un conjunto que no es medible en el sentido de Lebesgue.

Ejemplo 35. Para cada par $x, y \in [0,1)$ se define

$$x \oplus y \ = \ \begin{cases} x+y & \text{si } x+y<1, \\ x+y-1 & \text{si } x+y \geq 1. \end{cases}$$

Entonces $\oplus : [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ es una operación asociativa y conmutativa. Si E es un subconjunto de $[0,1)$ entonces escribimos $E \oplus y = \{x \oplus y \, : \, x \in E\}$.

Si $E \subset [0,1)$ y $y \in [0,1)$, entonces $m(E \oplus y) = m(E)$.

Si $x, y \in [0,1)$ son números tales que $x-y$ es racional, entonces escribimos $x \sim y$. Esta relación de equivalencia induce una partición del conjunto $[0,1)$ en clases de equivalencia. Por el Axioma de Elección, existe un conjunto P que contiene exactamente un representante de cada una de las clases de equivalencia. Sea $\{r_j\}$ una enumeración de todos los racionales en $[0,1)$. Suponga que $r_0 = 0$. Para cada $j \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, sea $P_j = P \oplus r_j$ de manera que $P_0 = P$. Suponga que $x \in P_j \cap P_k$. Entonces existen p_j, p_k elementos de P, tales que $p_j - p_k = r_k - r_j$. Puesto que $r_k - r_j$ es un número racional, entonces $p_j \sim p_k$. Puesto que P contiene sólo un representante de cada clase, entonces $j = k$. Por lo tanto $j \neq k$ implica $P_j \cap P_k = \emptyset$. Por otro lado, cada $x \in [0,1)$ pertenece a alguna clase de equivalencia y por lo tanto es equivalente a algún elemento de P. Pero si x difiere de un elemento de P por el racional r_j, entonces $x \in P_j$. Por lo tanto

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \ = \ [0,1).$$

Que P no es medible, se sigue ahora de

$$1 \ = \ m[0,1) \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} m(P_j) \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} m(P). \ \square$$

Nos ocuparemos ahora del así llamado conjunto de Cantor.

Ejemplo 36. Para cada $x \in [0,1]$, sea $a_j = a_j(x) \in \{0,1,2\}$ tal que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}.$$

Esta expansión es única a menos que $x = t/3^k$ para algunos enteros t, k. Podemos suponer siempre que 3 no divide a t. En este caso x tiene dos expansiones. En efecto, puesto que 3 no divide a t, entonces $t = 3q + \ell$ en donde $\ell \in \{1,2\}$. Por lo tanto

$$x = \frac{q}{3^{k-1}} + \frac{\ell}{3^k} = \frac{q}{3^{k-1}} + \frac{\ell - 1}{3^k} + \sum_{j>k} \frac{2}{3^j}$$

son dos expansiones distintas de x. Si $x = t/3^k$ y 3 no divide a t, entonces, en una de las expansiones para x se tiene que $a_k = 1$, mientras que en la otra expansión, se tiene que $a_k \in \{0,2\}$. Tomaremos siempre la segunda expansión. En este caso

$$a_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$a_1 \neq 1, \quad a_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

y así sucesivamente. El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las $x \in [0,1]$ tales que, si

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$$

es su expansión en base 3, entonces $a_j \neq 1$ para cada $j \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, $\mathcal{C}$ se obtiene de $[0,1]$, al remover el intervalo $(1/3, 2/3)$, luego remover los intervalos $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$ y así sucesivamente. $\square$

Definición 37. Un conjunto A es totalmente disconexo, si los únicos subconjuntos de A que son conexos son de la forma $\{x\}$ para algún $x \in A$. $\square$

Proposición 38. *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

(a) *$\mathcal{C}$ es totalmente disconexo.*

(b) *$\mathcal{C}$ no tiene puntos aislados.*

(c) $m(\mathcal{C}) = 0$.

(d) $\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = \mathrm{Card}(\mathbf{R})$.

Ejercicio 39. Si $f : [0,1] \to [0,1]$ es mónotona creciente, entonces f tiene a lo más un conjunto numerable de puntos de discontinuidad.

Ejercicio 40. Si $f : [0,1] \to [0,1]$ es mónotona creciente y sobreyectiva, entonces f es continua.

Ejemplo 41. Sea $x \in \mathcal{C}$. Entonces podemos escribir

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b_j}{3^j} \qquad \text{en donde} \qquad b_j \in \{0,1\}.$$

La función de Cantor $f : \mathcal{C} \to [0,1]$ está definida mediante

$$f\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2b_j}{3^j} \Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j}.$$

La función de Cantor es sobreyectiva y por lo tanto $\mathcal{C}$ es un conjunto no numerable. Podemos ahora extender el dominio de definición de f de la siguiente manera. Si $x \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$, sea

$$f(x) = \sup\{ f(y) \ : \ y \in \mathcal{C},\ y \le x \}.$$

Esta función $f : [0,1] \to [0,1]$ es monótona creciente y sobreyectiva. Por el Ejercicio 40, la función de Cantor es continua. $\square$

Ejercicio 42. Si $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor, entonces $\mathcal{C} + \mathcal{C} = [0,2]$.

Solución. Nótese que $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \big\{a + b \,:\, a \in \mathcal{C},\, b \in \mathcal{C}\big\}$ está dado por

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j}$$

en donde tanto a_j como b_j ambos pertenecen a $\big\{0, 2\big\}$. Puesto que la suma anterior se puede escribir como

$$2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a_j + b_j)/2}{3^j},$$

entonces vemos que $\mathcal{C} + \mathcal{C} = [0,2]$. $\blacksquare$

Ejercicio 43. Si $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor, pruebe que $\mathcal{C} - \mathcal{C} = [-1,1]$.

Ejercicio 44. (Steinhaus). Sea $A \subset \mathbf{R}$ un conjunto cerrado tal que $m(A) > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subset A - A$.

Solución. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea

$$U_n \;=\; \Big\{u \in \mathbf{R} \,:\, \exists\, a \in A \text{ tal que } |u - a| < \frac{1}{n}\Big\}.$$

Entonces $\big\{U_n\big\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos abiertos. Sea $b \notin A$. Como A es cerrado, entonces existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$\big(b - \frac{1}{n},\, b + \frac{1}{n}\big) \;\subset\; \widetilde{A}.$$

Por lo tanto $b \notin U_n$. Pero entonces

$$A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset A, \qquad \text{es decir} \qquad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

ya que $A \subset U_n$ para cada $n \in \mathbf{N}$. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} m(U_n) = m(A) > 0$$

entonces existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$\frac{2}{3}\, m(U_n) < m(A).$$

Sea $\delta = 1/n$. Si $|w| < \delta$ entonces el conjunto $A_w = \big\{a - w \,:\, a \in A\big\}$ está contenido en U_n. Puesto que $m(A_w) = m(A)$ entonces

$$\begin{aligned} m\big(U_n \setminus (A \cap A_w)\big) &= m\big((U_n \setminus A) \,\cup\, (U_n \setminus A_w)\big) \\ &\leq m(U_n \setminus A) + m(U_n \setminus A_w) \\ &= 2\, m(U_n) - 2\, m(A) \\ &< \frac{2}{3}\, m(U_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $m(A \cap A_w) > 0$ y en particular, $A \cap A_w$ no es vacío. Por lo tanto $w = x - y$ para algunos elementos x, y del conjunto A. ∎

Ejercicio 45. Construir conjutos tipo Cantor de medida positiva.

Solución. Sea $\ell \geq 3$ un número real. Del centro del intervalo $[0, 1]$ se remueve un subintervalo de longitud $1/\ell$. De cada uno de los dos subintervalos restantes, se remueve un subintervalo de longitud $1/\ell^2$.

Se continua este proceso de manera indefinida. La medida del conjuto que se ha removido es

$$\frac{1}{\ell}\sum_{j=0}^{\infty}\big(\frac{2}{\ell}\big)^{j} \;=\; \frac{1}{\ell-2}.$$

Si $\ell > 3$ entonces el conjunto de puntos que permanecen, tiene medida igual a $(\ell-3)/(\ell-2) \;>\; 0.$ ∎

Ejercicio 46. Muestre que la función

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

es diferenciable para todo $x \in \mathbf{R}$ pero $f'(x)$ es discontinua en $x = 0$.

Ejercicio 47. (V. Volterra). Pruebe que existe una función diferenciable $f\colon[0,1] \to \mathbf{R}$ cuya derivada $f'(x)$ es acotada pero no integrable en el sentido de Riemann.

Solución. Sea $K \subset [0,1]$ un conjunto tipo Cantor de medida positiva. Sea $\big\{I_n\big\}$ la sucesión de los intervalos abiertos que se removieron al construir K. Si $I_n = (a,b)$ entonces se define $g_n\colon(a,b) \to \mathbf{R}$ mediante

$$g_n(x) \;=\; (x-a)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x-a}.$$

Existe $\xi \in \big(a,\ \dfrac{a+b}{2}\big)$ tal que $g_n'(\xi) = 0$. Se define ahora $f_n\colon(a,b) \to \mathbf{R}$ mediante

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} g_n(x) & \text{si } a < x \leq \xi, \\ g_n(\xi) & \text{si } \xi \leq x \leq \dfrac{a+b}{2}, \\ g_n(a+b-x) & \text{si } \dfrac{a+b}{2} \leq x < b. \end{cases}$$

La función definida mediante

$$f(x) \;=\; \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in I_n, \\ 0 & \text{si } x \in K, \end{cases}$$

es diferenciable para toda $x \in [0,1]$. La función derivada $f'(x)$ es discontinua en todo punto de K. Además $f'(x)$ es acotada. Como K tiene medida positiva, entonces $f'(x)$ no es una función integrable en el sentido de Riemann. ∎

§6. Ejercicios.

Ejercicio 48. Sea $m^*(A)$ la medida exterior de Lebesgue del conjunto $A \subset \mathbf{R}$. Pruebe que

$$m^*(A) \;=\; \inf \Big\{ m(B) \,:\, B \text{ es medible, } A \subset B \Big\}.$$

Ejercicio 49. Sea $\epsilon > 0$. Construir un un conjunto abierto $A \subset \mathbf{R}$ que sea denso en $\mathbf{R}$ y tal que $m(A) < \epsilon$.

Ejercicio 50. Sea $\alpha < \beta$. Sea $E \subset [0,1]$ un conjunto medible. Suponga que $m(E) = \beta$. Demuestre que $f(x) := m\big([0,x] \cap E\big)$ es una función continua. Concluya que E contiene un subconjunto medible A tal que $m(A) = \alpha$.

Ejercicio 51. Sea E un subconjunto medible de $\mathbf{R}$ tal que $m(E) < \infty$. Para cada $x \in \mathbf{R}$ sea $f(x) = m\big((E+x) \cap E\big)$. Pruebe que $f(x)$ es una función continua en $\mathbf{R}$ y satisface

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \;=\; 0.$$

Ejercicio 52. Considere las siguiente sucesión monótona de conjuntos medibles: $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset [0,1]$. Demuestre que

$$m\big(\bigcup_n A_n\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

Ejercicio 53. Sea $E \subset [0,1]$ un conjunto medible tal que existe un número positivo α con la propiedad de que $m(E \cap I) > \alpha \cdot m(I)$ para cada intervalo abierto $I \subset [0,1]$. Demuestre que $m(E) = 1$.

Ejercicio 54. Sea $E \subset \mathbf{R}$ un conjunto con la siguiente propiedad. Existe $0 < \delta < 1$ tal que para todo intervalo abierto (a,b), el conjunto $E \cap (a,b)$ puede cubrirse con una colección contable de intervalos $\big\{I_j\big\}$ tal que $\sum m(I_j) < \delta(b-a)$. Pruebe que $m(E) = 0$.

Ejercicio 55. Construir un conjunto cerrado de medida positiva que no contenga ningún conjunto abierto.

Solución. Sea $\big\{r_j\big\}$ la sucesión de todos los números racionales en $(0,1)$. Sea $I_j \subset (0,1)$ un intervalo abierto, tal que $r_j \in I_j$ y además $m(I_j) \leq 1/2^{j+1}$. Si

$$\mathcal{O} \;=\; \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \qquad \text{entonces} \qquad m(\mathcal{O}) \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) \;\leq\; \frac{1}{2}.$$

El conjunto $F = [0,1] \setminus \mathcal{O}$ no contiene ningún intervalo abierto y es tal que $m(F) \geq 1/2$. ∎

Ejercicio 56. Sea $\big\{f_n\big\}$ una sucesión de funciones medibles, con valores reales y definidas en $[0,1]$. Demuestre que existe una sucesión $\big\{a_n\big\}$ de números reales, tales que $\big\{a_n \cdot f_n\big\}$ converge a cero casi en todas partes.

Ejercicio 57. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbf{R}$. Sea $\{\epsilon_n\}$ una sucesion de números positivos que converge a cero. Suponga que

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\{x \in \mathbf{R} \,:\, |f_n(x)| \geq \epsilon_n\} \,<\, \infty.$$

Pruebe que $f_n(x) \to 0$ para casi toda $x \in \mathbf{R}$.

Ejercicio 58. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbf{R}$. Sea $a > 0$. Suponga que

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\{x \in \mathbf{R} \,:\, f_n(x) > a\} \,<\, \infty.$$

Demuestre que $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leq a$ para casi todo $x \in \mathbf{R}$.

Ejercicio 59. Sea $\{f_n\} \subset C[0,1]$ una sucesión de funciones continuas. Suponga que $f_n \to f$ casi en todas partes. Sea $0 \leq a < 1$. Pruebe que existe un conjunto compacto $K \subset [0,1]$ tal que $m(K) > a$ y $f(x)$ es continua en K.

Sugerencia. Usar el Teorema de Egorov.

Ejercicio 60. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en $[0,1]$. Pruebe que el conjunto de x tales que $\lim f_n(x)$ existe, es medible.

Capítulo 4

INTEGRAL DE LEBESGUE

§1. Funciones Medibles Acotadas.

Definición 1. Sea E un conjunto de números reales y sea χ_E la función indicadora de E. Una función simple es una función de la forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$$

en donde $a_j \in \mathbf{R}$ y cada E_j es un conjunto medible. Si φ es una función simple y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es el conjunto de valores de φ, entonces

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}, \qquad A_j = \{x : \varphi(x) = a_j\}$$

es la representación canónica de φ. En particular, los conjuntos A_j son disjuntos y no nulos. □

Definición 2. Sea φ una función simple que se anula en el complemento de un conjunto de medida finita. Definimos la integral de φ mediante

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j m(A_j) \qquad \text{en donde} \qquad \varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

es la representación canónica de φ. Si E es un conjunto medible, entonces

$$\int_E \varphi = \int \varphi \cdot \chi_E. \ \square$$

Ejercicio 3. Sea

$$\varphi \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \qquad \text{en donde} \qquad E_j \cap E_k \;=\; \emptyset$$

siempre que $j \neq k$. Supongamos que cada E_j es un conjunto medible de medida finita. Entonces

$$\int \varphi \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j m(E_j).$$

Ejercicio 4. Sean φ y ψ dos funciones simples que se anulan en el complemento de un conjunto de medida finita. Entonces

$$\int (a\varphi + b\psi) \;=\; a\int \varphi + b\int \psi \qquad \text{para cada} \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

Si además $\varphi \leq \psi$, entonces

$$\int \varphi \;\leq\; \int \psi.$$

Definición 5. Sea $f : E \to \mathbf{R}$ una función medible y acotada. Suponga que $m(E) < \infty$. La integral de Lebesgue de f sobre E se define mediante

$$\int_E f(x)\,dx \;=\; \inf \int_E \psi(x)\,dx$$

en donde el ínfimo es sobre todas las funciones simples que dominan a f, esto es, $f \leq \psi$. □

En la Proposición 8 que sigue, mostraremos que la integral de Lebesgue que acabamos de definir está bien definida. La prueba de la siguiente proposición queda a cargo del lector.

Proposición 6. *Si f y g son funciones medibles y acotadas, definidas en un conjunto E de medida finita, entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

(a) *Para cada $a, b \in \mathbf{R}$ se cumple que $\int_E (af + bg) = a \int_E f + b \int_E g$.*

(b) *Si $f = g$ casi en todas partes, entonces $\int_E f = \int_E g$.*

(c) *Si $f \leq g$ casi en todas partes, entonces*

$$\int_E f \leq \int_E g \qquad \text{y} \qquad \Big| \int_E f \Big| \leq \int_E |f|.$$

(d) *Si $A \leq f(x) \leq B$ entonces $Am(E) \leq \int_E f \leq Bm(E)$.*

(e) *Si A y B son conjuntos medibles y disjuntos, entonces*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Lema 7. *Si g es medible y $f = g$ salvo en un conjunto de medida cero, entonces f es medible.*

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned} \{x : f(x) < \alpha\} &= \Big[\{x : f(x) = g(x)\} \cap \{x : g(x) < \alpha\}\Big] \\ &\cup \Big[\{x : f(x) \neq g(x)\} \cap \{x : f(x) < \alpha\}\Big]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En la siguiente proposición, el ínfimo y el supremo se toman sobre todas las funciones simples φ, ψ, que satisfacen las desigualdades que se indican.

Proposición 8. *Sea $f : E \to \mathbf{R}$ una función acotada. Suponga que $m(E) < \infty$. Entonces*

$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi(x)\, dx \;=\; \sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi(x)\, dx$$

si y sólo si f es medible.

Demostración. Supongamos que f es medible y que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in E$. Sea $n \in \mathbf{N}$. Para cada k tal que $-n \leq k \leq n$, considere los siguientes conjuntos medibles

$$E_k \;=\; \Big\{ x \in E \;:\; \frac{k-1}{n} M < f(x) \leq \frac{k}{n} M \Big\}.$$

Nótese que

$$m(E) \;=\; \sum_{|k| \leq n} m(E_k).$$

Considere ahora las funciones simples

$$\psi_n \;=\; \sum_{|k| \leq n} \frac{M}{n} k \chi_{E_k} \qquad \text{y} \qquad \varphi_n \;=\; \sum_{|k| \leq n} \frac{M}{n} (k-1) \chi_{E_k}.$$

Entonces $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)$. Es claro que

$$\inf_{f \leq \psi} \int_E \psi \;\leq\; \int_E \psi_n \;=\; \frac{M}{n} \sum_{|k| \leq n} k m(E_k)$$

y también que

$$\sup_{\varphi \leq f} \int_E \varphi \;\geq\; \int_E \varphi_n \;=\; \frac{M}{n} \sum_{|k| \leq n} (k-1) m(E_k).$$

Por lo tanto

$$0 \;\leq\; \inf_{f\leq\psi}\int_E \psi \;-\; \sup_{\varphi\leq f}\int_E \varphi \;\leq\; \frac{M}{n}\sum_{|k|\leq n} m(E_k) \;=\; \frac{M}{n}m(E).$$

Haciendo que $n \to \infty$, vemos que

$$\inf_{f\leq\psi}\int_E \psi \;=\; \sup_{\varphi\leq f}\int_E \varphi.$$

Supongamos ahora que esta última igualdad se cumple. Para cada $n \in \mathbf{N}$ existen funciones simples φ_n y ψ_n tales que

$$\varphi_n(x) \;\leq\; f(x) \;\leq\; \psi_n(x) \qquad \text{y además} \qquad \int \psi_n - \int \varphi_n \;<\; \frac{1}{n}.$$

Las funciones

$$\psi^* \;=\; \inf_n \psi_n \qquad\quad \text{y} \qquad\quad \varphi^* \;=\; \sup_n \varphi_n$$

son ambas medibles y tales que

$$\varphi^*(x) \;\leq\; f(x) \;\leq\; \psi^*(x).$$

Sea A el conjunto de $x \in E$ tales que $\varphi^*(x) < \psi^*(x)$. Probaremos que $m(A) = 0$. Sea $A_n = \big\{x \in E \;:\; \psi^*(x) - \varphi^*(x) > 1/n\big\}$. Entonces

$$0 \;=\; \int_E \psi^* - \varphi^* \;\geq\; \int_{A_n} \psi^* - \varphi^* \;\geq\; \frac{1}{n}m(A_n).$$

Pero entonces

$$m(A) \;=\; m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \;=\; 0.$$

Por lo tanto $f = \sup_n \varphi_n$ salvo posiblemente cada $x \in A$. ∎

Puesto que cada función escalón es una función simple, entonces se cumple la siguiente proposición.

Proposición 9. *Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función acotada. Suponga que f es integrable en el sentido de Riemann. Entonces f es medible y además la integral de Lebesgue de f es igual a la integral de f en el sentido de Riemann.*

Ejercicio 10. Sean p, λ dos números reales positivos. Sea $E \subset \mathbf{R}$. Sea $f : E \to \mathbf{R}$ una función medible. Sea $E_\lambda = \big\{x : |f(x)| \geq \lambda\big\}$. Demuestre que

$$m(E_\lambda) \;\leq\; \frac{1}{\lambda^p} \int_{E_\lambda} |f|^p.$$

Para $p = 2$ se obtiene la desigualdad de Chebyshev:

$$m\big\{x :\; |f(x)| \geq \epsilon\big\} \;\leq\; \frac{1}{\epsilon^2} \int_E |f(x)|^2 \, dx.$$

Ejercicio 11. Sea $f : E \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in E$. Suponga que $m(E) > 0$. Pruebe que $\int_E f > 0$.

Solución. Supongamos que la integral se anula. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea $E_n = \big\{x \in E \;:\; f(x) > 1/n\big\}$. Entonces

$$0 \;=\; \int_E f \;\geq\; \int_{E_n} f \;\geq\; \frac{1}{n} m(E_n).$$

Por lo tanto

$$m(E) \;=\; m\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) \;=\; 0,$$

lo cual contradice que $m(E) > 0$. ∎

Teorema 12. (de Convergencia Acotada). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un conjunto E de medida finita. Suponga que $|f_n(x)| \leq M$ para cada $x \in E$ y cada $n \in \mathbf{N}$. Si para cada $x \in E$, se cumple que $f_n(x)$ converge a $f(x)$, entonces*

$$\int_E f \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Demostración. Sean ϵ y δ dos números positivos. Existen un conjunto $A \subset E$ y un entero N tales que $m(A) < \delta$ y $n > N$ junto con $x \in E \setminus A$ implican que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. Por lo tanto

$$\Big| \int_E f - \int_E f_n \Big| \;\leq\; \int_A |f - f_n| + \int\limits_{E\setminus A} |f - f_n| \;\leq\; 2M\delta + \epsilon m(E). \;\blacksquare$$

§2. Funciones Medibles no Negativas.

Definición 13. Sea $f : E \to [0,\infty)$ una función no negativa definida en un conjunto medible. La integral de f se define mediante

$$\int_E f \;=\; \sup_{h \leq f} \int_E h$$

en donde h es una función acotada y medible que se anula en el complemento de un conjunto de medida finita: $m\{x \;:\; h(x) \neq 0\} < \infty$. □

Proposición 14. *Si f y g son funciones medibles no negativas, entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

(a) *Si $c > 0$, entonces $\int_E cf = c \int_E f$.*

(b) $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.

(c) *Si* $f \leq g$ *casi en todas partes, entonces* $\int_E f \leq \int_E g$.

Teorema 15. (Lema de Fatou). *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones no negativas tales que* $f_n(x) \to f(x)$ *para casi toda* $x \in E$. *Entonces*

$$\int_E f \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Demostración. Puesto que las integrales sobre conjuntos de medida cero son nulas, entonces se puede suponer que $f_n \to f$ en cada $x \in E$. Sea h una función acotada tal que $h(x) \leq f(x)$ para cada $x \in E$. Supongamos que $m(A) < \infty$ en donde $A = \{x \in E \ : \ h(x) \neq 0\}$. Sea $h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}$. Entonces $\{h_n\}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotada que se anula en el complemento de A. Por el Teorema de Convergencia Acotada, tenemos que

$$\int_E h \ = \ \int_A h \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_A h_n \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Tomando el supremo sobre h, se obtiene

$$\int_E f \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n. \ \blacksquare$$

Teorema 16. (de Convergencia Monótona). *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión no decreciente de funciones medibles. Sea* $f = \lim f_n$. *Entonces*

$$\int f \ = \ \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demostración. Por el Lema de Fatou,

$$\int f \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Puesto que $f_n \leq f$ para cada $n \in \mathbf{N}$, entonces $\int f_n \leq \int f$ y por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f. \blacksquare$$

Corolario 17. *Sea* $\{u_n\}$ *una sucesión de funciones no negativas y medibles. Si*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad \textit{entonces} \qquad \int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n.$$

Definición 18. Una función f no negativa se dice que es integrable sobre el conjunto E, si

$$\int_E f(x)\,dx < \infty. \square$$

Proposición 19. *Sea* f *una función no negativa e integrable sobre* E. *Para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $A \subset E$ *satisface* $m(A) < \delta$, *entonces*

$$\int_A f < \epsilon.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea $f_n = \min\{f, n\}$. Entonces $\lim \int_E f_n = \int_E f$. Por lo tanto, existe N tal que $\int_E (f - f_N) < \epsilon/2$. Sea $\delta = \epsilon/2N$. Si $A \subset E$ es tal que $m(A) < \delta$, entonces

$$\int_A f = \int_A (f - f_N) + \int_A f_N \leq \underbrace{\int_E (f - f_N)}_{\text{menor que } \epsilon/2} + Nm(A) < \epsilon. \blacksquare$$

§3. Integral General de Lebesgue.

Sea $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Escribamos

$$f^{+}(x) \;=\; \max\{f(x), 0\} \qquad \text{y} \qquad f^{-}(x) \;=\; \max\{-f(x), 0\}.$$

Entonces se cumple que

$$f = f^{+} - f^{-} \qquad \text{y} \qquad |f| = f^{+} + f^{-}.$$

Definición 20. Una función medible $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ se dice que es integrable sobre E, si f^{+} y f^{-} son funciones integrables sobre E. En este caso,

$$\int_E f \;=\; \int_E f^{+} - \int_E f^{-}.$$

Definición 21. Sea $1 \leq p < \infty$. Sea E un conjunto medible. Mediante $\mathrm{L}^p(E)$ se denota el conjunto de todas las funciones $f\colon E \to \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ tales que $\int_E |f|^p < \infty$. Decimos que $\{f_n\}$ converge a f en $\mathrm{L}^p(E)$ si se cumple que $\int |f - f_n|^p \to 0$ siempre que $n \to \infty$. $\square$

Proposición 22. *Sean f y g dos funciones integrables sobre E. Entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

(a) *cf es integrable y $\int_E cf = c\int_E f$.*

(b) $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.

(c) *Si $f \leq g$ para casi toda $x \in E$, entonces $\int_E f \leq \int_E g$.*

(d) *Si A y B son conjuntos medibles y disjuntos, entonces*

$$\int_{A\cup B} f \;=\; \int_A f + \int_B f.$$

Teorema 23. (de Convergencia Dominada). *Sea* $g : E \to \mathbf{R}$ *una función integrable. Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles tales que* $|f_n| \le g$ *en* E*. Suponga que* $f(x) = \lim f_n(x)$ *para casi toda* $x \in E$*. Entonces*

$$\int_E f \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Demostración. Puesto que $|f| \le g$, entonces f es integrable. Puesto que la función $g - f_n$ es no negativa, entonces

$$\int_E g - \int_E f \;=\; \int_E (g-f) \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n) \;=\; \int_E g - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Por lo tanto $\limsup \int_E f_n \le \int_E f$. Repitiendo el mismo argumento con $g + f_n$, se obtiene que $\int_E f \le \liminf \int_E f_n$. ∎

Ejercicio 24. Sea $\epsilon > 0$. Sea f una función integrable sobre E. Pruebe que existen funciones g escalón y h continua tales que

$$\int_E |f-g| \;<\; \epsilon \qquad \text{y} \qquad \int_E |f-h| \;<\; \epsilon.$$

§4. Convergencia en Medida.

Definición 25. Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones medibles, se dice que converge a f en medida, si para cada $\epsilon > 0$ existe N tal que $n > N$ implica

$$m\{x \,:\, |f(x) - f_n(x)| \ge \epsilon\} \;<\; \epsilon. \;\square$$

Ejercicio 26. La sucesión $\{f_n\}$ converge en medida a f si y sólo si para cada $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} m\{x \,:\, |f(x) - f_n(x)| \ge \epsilon\} \;=\; 0.$$

Ejercicio 27. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables con dominio $[0,1]$. Suponga que $\int |f_n| \to 0$. Demuestre que la sucesión $\{f_n\}$ converge a cero en medida.

Solución. Sea $\epsilon > 0$. Sea $E_n = \{x : |f_n(x)| \geq \epsilon\}$. Entonces

$$m(E_n) \;\leq\; \int_{E_n} \frac{|f_n(x)|}{\epsilon}\, dx \;\leq\; \frac{1}{\epsilon}\int |f_n| \;\to\; 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty. \;\blacksquare$$

Proposición 28. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles que convergen en medida a f. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n(k)}\}$ que converge a f para casi toda x.*

Demostración. Dado $j \in \mathbf{N}$, existe N_j tal que $n \geq N_j$ implica

$$m\Big\{x \;:\; |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2^j}\Big\} \;<\; \frac{1}{2^j}.$$

Sea $E_j = \{x \;:\; |f(x) - f_{N_j}(x)| \geq 1/2^j\}$. Sea $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$.

Entonces $f_{N_j}(x) \to f(x)$ para cada $x \notin A$. Nótese ahora que

$$m(A) \;\leq\; m\Big(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\Big) \;\leq\; \sum_{j=k}^{\infty} m(E_j) \;\leq\; \frac{1}{2^{k+1}} \;\to\; 0$$

cuando $k \to \infty$. $\blacksquare$

§5. Lema de Riemann-Lebesgue.

El siguiente resultado se conoce como el Lema de Riemann-Lebesgue.

Teorema 29. *Sea $\varphi\colon[0,1]\to\mathbf{R}$ una función continua y periódica de período 1. Suponga que $\int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0$. Entonces para toda función integrable $f\colon[0,1]\to\mathbf{R}$, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)\varphi(nt)\,dt \;=\; 0.$$

Demostración. Supongamos primero que f es continua. Para toda $\epsilon>0$ existe $n\in\mathbf{N}$ tal que para cada par $x,y\in[0,1]$ tal que $|x-y|\le 1/n$, se cumple que $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. Por lo tanto, para cada $1\le j\le n$ y cada $t\in[j-1,j]$, se cumple que

$$\left|f\left(\frac{t}{n}\right)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right| \;<\; \epsilon.$$

Sea $K=\int_0^1|\varphi(t)|\,dt$. Para cada $1\le j\le n$ tenemos $\int_{j-1}^{j} f\left(\frac{j}{n}\right)\varphi(t)\,dt = 0$ y por lo tanto, uniformemente en j,

$$\left|\int_{j-1}^{j} f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi(t)\,dt\right| \;\le\; \int_{j-1}^{j}|\varphi(t)|\left|f\left(\frac{t}{n}\right)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|dt \;<\; K\epsilon.$$

Entonces,

$$\left|\int_0^1 f(t)\varphi(nt)\,dt\right| \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{j-1}^{j} f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi(t)\,dt\right| \;<\; K\epsilon.$$

En el caso de que f es solamente integrable pero no necesariamente continua, sea h una función continua tal que $\int |f-h| < \epsilon$. Entonces

$$\Big|\int\limits_0^1 f(t)\varphi(nt)\,dt\Big| \;\le\; \max_{0\le t\le 1}|\varphi(t)|\int\limits_0^1 |f(t)-h(t)|\,dt + \Big|\int\limits_0^1 h(t)\varphi(nt)\,dt\Big|$$

y la última integral tiene a cero cuando $n\to\infty$. ∎

Ejercicio 30. Sea $A\subset[0,2\pi]$ un conjunto medible. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty}\int_A \cos nx\,dx \;=\; 0.$$

Ejercicio 31. Suponga que $\{n_k\}$ es una sucesión creciente de enteros positivos y E es el conjunto de todas las $x\in(-\pi,\pi)$ tales que la sucesión $\{\operatorname{sen} n_k x\}$ es convergente. Demuestre que E es medible y tiene medida de Lebesgue igual a cero.

Solución. Para cada $x\in(-\pi,\pi)$ sean

$$f_1(x) \;=\; \liminf_{k\to\infty}\,\operatorname{sen}(n_k x) \qquad \text{y} \qquad f_2(x) \;=\; \limsup_{k\to\infty}\,\operatorname{sen}(n_k x).$$

Entonces f_1 y f_2 son medibles. Por lo tanto, f_2-f_1 es medible. Por lo tanto,

$$E \;=\; \{x \,:\, f_2-f_1=0\}$$

es un conjunto medible. Para cada $x\in E$, sea $f(x)=f_1(x)$. Entonces,

$$\int_E f^2 \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\int_E \big(1-\cos 2n_k x\big)\,dx \;=\; \frac{1}{2}m(E).$$

Por otro lado,

$$0 \;\le\; \int_E f^2 \;=\; \lim_{k\to\infty}\int_E f(x)\operatorname{sen} n_k x\,dx \;=\; 0$$

ya que f es medible y acotada y por lo tanto integrable. ∎

§6. Ejercicios.

Ejercicio 32. Construir un conjunto abierto E que sea denso en $\mathbf{R}$ y tal que

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 \, \chi_E(x) \, dx \; < \; \infty.$$

Ejercicio 33. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función integrable. Pruebe que

$$m\big\{x \; : \; |f(x)| > n\big\} \; = \; o\big(\frac{1}{n}\big) \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty.$$

Solución. Supondremos que $f(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbf{R}$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea $E_n = \big\{x \; : \; f(x) > n\big\}$. Entonces

$$m(E_n) \; \leq \; \frac{1}{n} \int_{E_n} f.$$

Sea

$$f_n(x) \; = \; \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq n \\ 0 & \text{si } f(x) > n. \end{cases}$$

El Teorema de Convergencia Monótona implica que

$$\int_{E_n} f \; = \; \int f - \int f_n \; \to \; 0$$

cuando $n \to \infty$. ∎

Ejercicio 34. Sea $p > 0$. Suponga que $|f(x)|^p$ es una función integrable. Pruebe que

$$m\big\{x : |f(x)| > \lambda\big\} \; = \; o\big(\frac{1}{\lambda^p}\big), \qquad \text{cuando } \; \lambda \to \infty.$$

Demuestre que el recíproco de esta afirmación no se cumple.

Ejercicio 35. Sea $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ una función medible que toma valores positivos. Suponga que para cada $y > 0$, se cumple

$$m\{x : f(x) > y\} \leq \frac{1}{y^2}.$$

Pruebe que f es integrable.

Ejercicio 36. Suponga que $p > 0$. Sea $f : E \to \mathbf{R}$ una función integrable. Sea $E_\lambda = \{x : |f(x)| > \lambda\}$. Suponga que $m(E_\lambda) = O(1/\lambda^p)$. Sea $E \subset \mathbf{R}$ un conjunto de medida finita. Pruebe que $|f(x)|^q$ es una función integrable para cada $0 \leq q < p$.

Ejercicio 37. Sea $f(x)$ integrable. Sea $\varphi_n = m\{x : |f(x)| > n\}$. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n < \infty$.

Solución. Sin perder generalidad, supondremos que $f \geq 0$. Para cada $\lambda > 0$ sea $A_\lambda = \{x : f(x) > \lambda\}$ de modo que $\varphi_n = m(A_n)$. Si $\lambda > 0$ entonces $\int f \geq \lambda\, m(A_\lambda)$. Con $\lambda = 1$ se deduce que $\varphi_1 = m(A_1) < \infty$. Por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot m\big(A_n \setminus A_{n+1}\big) \leq \int f < \infty.$$

Puesto que los dos conjuntos $A_{n+1} \subset A_n$ tienen medida finita ($\leq \varphi_1$), entonces $m(A_n \setminus A_{n+1}) = m(A_n) - m(A_{n+1})$. Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \big(\varphi_n - \varphi_{n+1}\big) = 1 \cdot \big(\varphi_1 - \varphi_2\big) + 2 \cdot \big(\varphi_2 - \varphi_3\big) + 3 \cdot \big(\varphi_3 - \varphi_4\big) + \cdots$$

Simplificando la última suma se obtiene el resultado. ∎

Ejercicio 38. Sea $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una función integrable. Demuestre que $f(x) = 0$ para casi toda $x \in [0,1]$ suponiendo que $\int_E f = 0$ para cada

(a) conjunto $E \subset [0,1]$ medible,

(b) conjunto $E \subset [0,1]$ abierto.

Solución de (a). Sea $\alpha > 0$. Supongamos que existe un subconjunto $E \subset [0,1]$ tal que $mE > 0$ y con la propiedad de que para cada $x \in E$ se cumple que $f(x) \geq \alpha$. En este caso

$$\int_E f \;\geq\; \int_E \alpha \;=\; \alpha \cdot mE \;>0.$$

Puesto que esto contradice la hipótesis del problema entonces dicho conjunto E no existe. Concluimos entonces que cada uno de los conjuntos $E_n = \big\{x : f(x) > 1/n\big\}$ tiene medida cero. Por lo tanto

$$m\big\{x : f(x) > 0\big\} \;=\; m\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} mE_n \;=\; 0.$$

Por lo tanto $f(x) \leq 0$ casi siempre. El mismo argumento con $-f$ en lugar de f muestra que $f(x) \geq 0$ casi siempre. Por lo tanto $f(x) = 0$ casi por doquier. ∎

Ejercicio 39. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función integrable. Sea $\alpha > 0$. Pruebe que para casi todo $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(nx)}{n^\alpha} \;=\; 0.$$

Solución. Podemos suponer que $f \geq 0$. Por lo tanto

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(nx)}{n^\alpha}\, dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \int f(nx)\, dx \;=\; \int f(x)\, dx \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}. \;∎$$

Ejercicio 40. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función medible, periódica de período 1. Suponga que $\int_0^1 |f| < \infty$. Pruebe que para casi todo $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(nx)}{n^2} \;=\; 0.$$

Ejercicio 41. Sea $\{f_n\} \subset \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$. Suponga que existe $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ con la propiedad de que para cada $n \geq 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)|\, dt \;<\; \frac{1}{n^2}.$$

Demuestre que $f_n \to f$ casi en todas partes.

Ejercicio 42. Sea $f : [0,1] \to (0,\infty)$ una función integrable que toma valores positivos. Sea $\alpha \in (0,1]$. Pruebe que

$$\inf_E \left\{ \int_E f \right\} \;>\; 0$$

en donde el infimo se toma sobre todos los conjuntos medibles E para los cuales $m(E) \geq \alpha$.

Solución. Supongamos que el ínfimo es igual a cero. Entonces existe una sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $[0,1]$ tales que $m(E_n) \geq \alpha$ y además

$$\int_{E_n} f \;<\; \frac{\alpha}{2n}.$$

Sea $A_n = \{x \in E_n : f(x) < 1/n\}$. Sea $B_n = E_n \setminus A_n$. Entonces

$$\frac{\alpha}{2n} \;>\; \int_{E_n} f \;\geq\; \int_{B_n} f \;\geq\; \frac{1}{n}\, m(B_n),$$

y por lo tanto $m(A_n) = m(E_n) - m(B_n) \geq \alpha/2$. Será suficiente si $A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n$ tiene medida positiva. En efecto, si $x \in A^*$ entonces $f(x) < 1/n$ para una infinidad de valores de $n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto, $f(x) = 0$ para cada $x \in A^*$. Para mostrar que $m(A^*) > 0$, nótese que por el Teorema de la Convergencia Acotada, se cumple que

$$m(A^*) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sup_{k\geq n} \chi_{A_k} \;\geq\; \limsup_{n\to\infty} \int_0^1 \chi_{A_n} \;\geq\; \frac{\alpha}{2}. \;\blacksquare$$

Ejercicio 43. Sea $\{f_n\} \subset \mathrm{L}^2$ una sucesión de funciones ortogonales, es decir, $\int f_n f_m = 0$ siempre que $m \neq n$. Sea $\sigma_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$. Pruebe que

$$\text{si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j\leq n} ||f_j||_2^2 \;=\; 0 \quad \text{entonces} \quad \sigma_n(x) \to 0 \quad \text{en medida.}$$

Ejercicio 44. Construya una sucesión de funciones que converge en cada punto de un intervalo I, pero que diverge en $\mathrm{L}^2(I)$.

Ejercicio 45. Construya una sucesión de funciones que diverge en cada punto de un intervalo I, pero que converge en $\mathrm{L}^2(I)$.

Ejercicio 46. Suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones que convergen a f en L^p. Sea q tal que $(1/p) + (1/q) = 1$. Sea $g \in \mathrm{L}^q$. Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)\,dx \;=\; \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Ejercicio 47. Sea $p \geq 1$ y sea $f \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R})$. Para cada $x \in \mathbf{R}$ sea

$$F(x) \;=\; \int_0^x f(t)\,dt.$$

Pruebe que $F(x+h) - F(x) = o(|h|^{1-\frac{1}{p}})$ cuando $h \to 0$.

Ejercicio 48. Sea $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función integrable no negativa. Sea $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función medible y acotada que satisface $f(x) > 1$ para cada $x \in \mathbf{R}$. Suponga que

$$\int_{\mathbf{R}} f^n\, g \;\leq\; M$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. Demuestre que $g(x) = 0$ para casi toda $x \in \mathbf{R}$.

Ejercicio 49. Sea $f \in \mathrm{L}^1[0,1]$. Pruebe que

$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 \big|f(x+h) - f(x)\big|\, dx \;=\; 0.$$

Ejercicio 50. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f'(0)$ existe. Pruebe que

$$\frac{f(x)}{x^{3/2}} \;\in\; \mathrm{L}^1[0,1].$$

Ejercicio 51. ¿Para qué números reales α se cumple que la función $f_\alpha(t) = t^\alpha\, e^{-t}$ pertenece a $\mathrm{L}^p(0,\infty)$?

Ejercicio 52. Sea $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$. Suponga que para cada conjunto medible E, se cumple

$$\Big|\int_E f\,\Big| \;\leq\; m(E).$$

Pruebe que $|f(x)| \leq 1$ para casi todo $x \in \mathbf{R}$.

Ejercicio 53. Sean f y g dos funciones en $\mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ tales que $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ para casi todo $x \in \mathbf{R}$. Pruebe que para cada ϵ positivo existe δ tal que para todo conjunto medible A,

$$\int_A g \;<\; \delta \qquad \text{implica} \qquad \int_A f \;<\; \epsilon.$$

Ejercicio 54. Sea $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ una función medible. Suponga que $\int gf = 0$ para cada función continua $f : [0,1] \to \mathbf{R}$. Pruebe que $g(x) = 0$ para casi toda $x \in [0,1]$.

Ejercicio 55. Suponga que $f_n(x) \to f(x)$ para casi toda $x \in [0,1]$. Suponga que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $m(E) < \delta$ implica $\int_E |f_n| < \epsilon$, para cada $n \in \mathbf{N}$. Pruebe que $\int_0^1 |f - f_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 56. Sea $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una función medible. Pruebe que existe una sucesión $\{p_n\}$ de polinomios, tal que $p_n(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in [0,1]$.

Ejercicio 57. Suponga que $f(x)$ tiene derivada continua en $[-1,1]$. Pruebe que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{1-\cos\lambda x}{x}\, f(x)\, dx \;=\; \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)-f(-x)}{2x}\, dx.$$

Solución. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $f(x)$ es impar. Entonces

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1-\cos\lambda x}{x}\, f(x)\, dx - \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{x}\, dx \;=\; -\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{x}\cos\lambda x\, dx \;\to\; 0.$$

En efecto, puesto que $f'(x)$ es continua, entonces existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq Mx$, para cada $x \in [0,1]$, y por lo tanto $f(x)/x$ es integrable. ∎

Ejercicio 58. Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

Sugerencia. Puesto que

$$(\mathbf{59}) \qquad \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)x}{2\operatorname{sen} x/2}$$

entonces

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \operatorname{sen}\bigl(n + \frac{1}{2}\bigr)x\, \frac{dx}{x} + \int_0^\pi g(x) \operatorname{sen}\bigl(n + \frac{1}{2}\bigr)x\, dx$$

en donde $g(x) = \dfrac{1}{2 \operatorname{sen} x/2} - \dfrac{1}{x}$.

Ejercicio 60. Pruebe que $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Sugerencia. Sea $n = 2m + 1$. Multiplique la ecuación (59) en el ejercicio anterior por x e integre sobre $[0, \pi]$ para obtener

$$\frac{\pi^2}{4} - \sum_{n=0}^m \frac{2}{\bigl(2n+1\bigr)^2} = \int_0^\pi \frac{x}{2\operatorname{sen} x/2} \operatorname{sen}\bigl(m + \frac{3}{2}\bigr)x\, dx.$$

Capítulo 5

ANÁLISIS FUNCIONAL

§1. Espacios Métricos.

Definición 1. Una métrica (o distancia) en un conjunto S es una función $\rho : S \times S \to \mathbf{R}$ que satisface las siguientes condiciones.

(a) Para cada par $x, y \in S$ se cumple que $\rho(x, y) \geq 0$.

(b) $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(c) Para cada par $x, y \in S$ se cumple que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

(d) Para cada $x, y, z \in S$ se cumple que $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$. □

Definición 2. Sea E un espacio lineal real o complejo. Una norma en E es una función $|| \cdot || : E \to [0, \infty)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones.

(a) $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(b) Para cada $x \in E$ y a escalar, $||ax|| = |a| \cdot ||x||$.

(c) Para cada par $x, y \in E$, se cumple $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. □

Si $|| \cdot ||$ es una norma definida en el espacio lineal E, entonces $\rho(x, y) = ||x - y||$ es una métrica en E.

Ejemplo 3. En $\mathbf{R}^n$ la siguiente es una norma

$$||x|| = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{en donde} \qquad x = (x_1, \ldots, x_n). \; \square$$

Ejemplo 4. El espacio de todas las sucesiones se denota mediante ω. Es claro que ω es un espacio lineal con la suma y el producto escalar definidas coordenada a coordenada. Aunque no hay una norma útil en ω, la siguiente fórmula define una métrica en ω:

$$\rho(x,y) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|} \qquad \text{en donde} \qquad \begin{cases} x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, \\ y = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}. \end{cases} \;\square$$

Ejemplo 5. El espacio de todas las sucesiones acotadas, se denota mediante ℓ_∞. La norma uniforme en ℓ_∞ está dada por

$$||x|| \;=\; \sup_j |x_j|. \;\square$$

Ejemplo 6. Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio ℓ_p consiste en el conjunto de todas las sucesiones $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que

$$||x||_p \;:=\; \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \;<\; \infty.$$

En particual $||x||_p$ es una norma en ℓ_p. $\square$

Ejemplo 7. Sea S un espacio métrico. Mediante $C(S)$ se denota el espacio de todas las funciones continuas $f : S \to \mathbf{R}$. Si suponemos que S es compacto, entonces el espacio lineal $C(S)$ admite la siguiente norma uniforme

$$||f|| \;=\; \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Sea $\{f_n\} \subset C(S)$ con S compacto. Si $\{f_n\}$ converge según la norma uniforme a f, entonces $f \in C(S)$. $\square$

Ejemplo 8. Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $A \subset \mathbf{R}$ un conjunto medible de números reales. El espacio $\mathrm{L}^p(A)$ que consiste en el conjunto de todas las funciones medibles f tales que

$$||f||_p := \left\{ \int_A |f|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

es un espacio normado. Notemos que aquí no se distingue entre funciones que difieren sólo en un conjunto de medida cero. En $\mathrm{L}^p(A)$, se cumple la siguiente desigualdad de Hölder

$$\int_A |fg| \leq ||f||_p \, ||g||_q \qquad \text{en donde} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

y también la desigualdad de Minkowski $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$. □

Definición 9. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (S, ρ) se dice que es una sucesión de Cauchy, si para todo $\epsilon > 0$, existe un número N tal que $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$ siempre que $m, n > N$. □

Ejercicio 10. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico (S, ρ). Demuestre las siguientes afirmaciones.

(a) $\{x_n\}$ está acotada, es decir, existen $y \in S$ y $M > 0$ tales que $\rho(x_n, y) < M$ para cada $n \in \mathbf{N}$.

(b) Si alguna subsucesión de $\{x_n\}$ converge a x, entonces la sucesión completa $\{x_n\}$ también converge a x.

Definición 11. Un espacio métrico (S, ρ) se dice que es completo, si toda sucesión de Cauchy $\{x_n\} \subset S$ converge a un elemento de S. □

Definición 12. Un espacio normado completo, se llama espacio de Banach. □

El espacio $C(S)$ del Ejemplo 7 es un espacio de Banach. Sea $1 \leq p < \infty$. Los espacios ℓ_p son espacios completos y por lo tanto son espacios de Banach. Más adelante probaremos que los espacios $\mathrm{L}^p(A)$ también son espacios de Banach.

Para la demostración del siguiente teorema, escribiremos $B(x,r)$ para denotar el conjunto de todas las $y \in S$ tales que $\rho(y,x) < r$.

Teorema 13. *Sea (S,ρ) un espacio métrico completo y sea $\{F_n\}$ una sucesión de conjuntos cerrados de S tales que*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \;=\; S.$$

Entonces existe $F_n \in \{F_n\}$ cuyo interior es no vacio: $\mathrm{int}(F_n) \neq \emptyset$.

Demostración. Sin perder generalidad podemos suponer que

$$F_m \;\not\subset\; \bigcup_{n=1}^{m-1} F_n \qquad \text{para cada } \; m \in \mathbf{N}.$$

Si existe un m tal que $\bigcup_{n=1}^{m} F_n$ cubre a un conjunto abierto, no vacio $\mathcal{O}$, mientras que $\bigcup_{n=1}^{m-1} F_n$ no cubre a $\mathcal{O}$, entonces

$$\mathcal{O} \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{m-1} F_n\Big)^{\sim}$$

es no vacio, es abierto y está contenido en F_m. Por lo tanto, si $\mathrm{int}(F_n) = \emptyset$ para cada n, entonces se deduce que

$$\mathrm{int}\Big(\bigcup_{n=1}^{m} F_n\Big) \;=\; \emptyset \qquad \text{para cada } \; m \in \mathbf{N}.$$

Probaremos que bajo esta situación, es imposible que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = S$. Nótese primero que si F es un subconjunto de S, entonces

$$x \in \operatorname{int}(F) \quad \text{implica que} \quad \exists\, \epsilon > 0 \ \text{ tal que } \ B(x,\epsilon) \subset F.$$

En caso de que $\operatorname{int}(F) = \emptyset$, entonces para toda $x \in S$ y $\epsilon > 0$ se cumple que $B(x,\epsilon) \cap \widetilde{F} \neq \emptyset$ y en particular $\widetilde{F} \neq \emptyset$.

Sea x_1 un elemento cualquiera de $\widetilde{F}_1$. Sea $0 < \epsilon_1 < 1$ tal que

$$B(x_1,\epsilon_1) \subset \widetilde{F}_1.$$

Sea $x_2 \in B\big(x_1, \frac{\epsilon_1}{2}\big) \setminus (F_1 \cup F_2)$ y sea $0 < \epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tal que

$$B(x_2,\epsilon_2) \subset B\big(x_1, \frac{\epsilon_1}{2}\big) \setminus (F_1 \cup F_2).$$

En general, si ya hemos obtenido los elementos $x_1, x_2 \ldots, x_{m-1} \in S$ y los números rales positivos $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{m-1}$, sea

$$x_m \in B\big(x_{m-1}, \frac{\epsilon_{m-1}}{2}\big) \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{m} F_n\Big)$$

y sea $0 < \epsilon_m < \dfrac{1}{m}$ tal que

$$B(x_m,\epsilon_m) \subset B\big(x_{m-1}, \frac{\epsilon_{m-1}}{2}\big) \setminus \Big(\bigcup_{n=1}^{m} F_n\Big).$$

De esta manera hemos definido una sucesión $\big\{x_n\big\} \subset S$ y una sucesión $\big\{\epsilon_n\big\}$ de números reales. La sucesión $\big\{x_n\big\}$ es de Cauchy, puesto que si $p, q > m$, entonces $x_p, x_q \in B(x_m, \epsilon_m/2)$ y por lo tanto $\rho(x_p, x_q) < 1/m$. Puesto que (S,ρ) es completo, entonces existe $x \in S$ tal que

$\lim x_n = x$. Afirmamos que x no pertenece a $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Para cada m, el conjunto $\{x_n : n > m\}$ está contenido en el conjunto cerrado

$$\bar{B}\big(x_m, \frac{\epsilon_m}{2}\big) = \Big\{y : \rho(x_m, y) \leq \frac{\epsilon_m}{2}\Big\}.$$

Por lo tanto $x \in \bar{B}(x_m, \epsilon_m/2)$. Puesto que

$$\bar{B}\big(x_m, \frac{\epsilon_m}{2}\big) \subset B(x_m, \epsilon_m) \subset \Big(\bigcup_{n=1}^{m} F_n\Big)^{\sim},$$

entonces $x \notin \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. ∎

Definición 14. Un conjunto B tal que la cerradura

$$\bar{B} = \bigcap_{B \subset C} C \qquad \text{(en donde } C \text{ es cerrado)}$$

tiene interior vacio ($\mathrm{int}(\bar{B}) = \emptyset$), se dice que es denso en ninguna parte.
□

Definición 15. Un conjunto C que es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte,

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{con} \quad \mathrm{int}(\bar{B}_n) = \emptyset \quad \text{para toda } n \in \mathbf{N},$$

se dice que es de la primera categoría. Un conjunto D se dice que es de la segunda categoría, si no es de la primera categoría. □

Teorema 16. (Baire). *Todo espacio métrico completo es de la segunda categoría.*

Proposición 17. *Existen funciones $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continuas y no diferenciables en ningún $x \in [0,1]$.*

Demostración. Sea $C[0,1]$ el conjunto de todas las funciones continuas definidas en el intervalo $[0,1]$. Este espacio está dotado de la norma uniforme

$$||f|| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Para cada $n \in \mathbf{N}$, sea D_n el conjunto de todas las $f \in C[0,1]$ para las cuales existe $x \in [0, 1-1/n]$ tal que $|f(u) - f(x)| \leq n(u-x)$ para cada $u \in [x,1]$. Nótese que si $f \in C[0,1]$ tiene derivada en algún $x \in [0,1]$, entonces $f \in D_n$ para algún n suficientemente grande.

Para probar que cada D_n es cerrado en $C[0,1]$, suponga que $\{f_k\}$ es una sucesión de elementos de D_n que converge a $f \in C[0,1]$. Para cada $k \in \mathbf{N}$, sea $x_k \in [0, 1-1/n]$ que hace que $f_k \in D_n$. Puesto que $[0, 1-1/n]$ es compacto, entonces existe una subsucesión $\{x_{k(j)}\}$ que converge a $x \in [0, 1-1/n]$. Es fácil ver que

$$\lim_{j \to \infty} f_{k(j)}(x_{k(j)}) = f(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} |f(u) - f(x)| &= \lim_{j \to \infty} |f_{k(j)}(u) - f_{k(j)}(x_{k(j)})| \\ &\leq \limsup_{j \to \infty} n|u - x_{k(j)}| = n|u - x| \end{aligned}$$

y por lo tanto $f \in D_n$.

Probaremos ahora que $\mathrm{int}(D_n) = \emptyset$. Sea $f \in C[0,1]$ y $\epsilon > 0$. Entonces f es uniformemente continua y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que $|f(u) - f(v)| < \epsilon/2$ siempre que $|u - v| < \delta$. Sea M un entero positivo tal que

$$\frac{1}{2M} < \min\big(\delta, \frac{\epsilon}{2n}\big).$$

Para $j = 0, 1, \ldots, 2M$, sea $x_j = j/2M$. Defina $g \in C[0,1]$ como la función lineal a trozos tal que

$$g(x_j) = \begin{cases} f(x_j) - \dfrac{\epsilon}{2} & \text{si } j \text{ es par,} \\ \\ f(x_j) + \dfrac{\epsilon}{2} & \text{si } j \text{ es impar.} \end{cases}$$

(Localmente g es una función lineal en cada intervalo cerrado $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, 1, \ldots, 2M - 1$).

Afirmamos que $g \in B(f, \epsilon)$. En efecto, sea $x \in [0,1]$. Existen el entero j y el número real $0 \leq a \leq 1$ tales que $x = ax_j + (1-a)x_{j+1}$ de manera que

$$g(x) = ag(x_j) + (1-a)g(x_{j+1}).$$

Por lo tanto

$$|f(x) - g(x)| \leq a|f(x) - g(x_j)| + (1-a)|f(x) - g(x_{j+1})| \leq \epsilon.$$

Para ver que $g \notin D_n$, nótese que la pendiente de g en cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ es

$$\frac{\big|f(x_{j+1}) - \frac{\epsilon}{2} - f(x_j) - \frac{\epsilon}{2}\big|}{x_{j+1} - x_j} \geq 2M\big(\epsilon - |f(x_{j+1}) - f(x_j)|\big) > n.$$

Esto prueba que D_n no contiene ninguna vecindad de ningún punto en $C[0,1]$, esto es, $\operatorname{int}(D_n) = \emptyset$. El subconjunto $B \subset C[0,1]$ de las funciones que tienen derivada en algún $x \in [0,1]$, está contenido en la unión de los D_n, es decir $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Puesto que $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es de la primera categoría, entonces B también es de la primera categoría. ∎

§2. Espacios Normados.

Definición 18. Sean E y F dos espacios normados bajo un mismo campo de escalares. Un operador lineal $T : E \to F$ es una transformación lineal entre estos dos espacios. □

Teorema 19. *Sea $T : E \to F$ un operador lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *T es continuo.*

(b) *T es continuo en un punto.*

(c) *T es continuo en 0.*

(d) *Existe M tal que para cada $x \in E$ se cumple que $||Tx|| \leq M||x||$.*

Demostración. Es claro que (**a**) implica (**b**). Para probar que (**b**) implica (**c**) supongamos que T es continua en $x_0 \in E$. Entonces

$$\forall \epsilon \ \exists \delta \ : \ ||x - x_0|| < \delta \quad \Rightarrow \quad ||Tx - Tx_0|| < \epsilon.$$

Ahora bien, si $||x|| < \delta$, entonces

$$||Tx - T0|| \ = \ ||Tx|| \ = \ ||T(x_0 - x) - Tx_0|| \ < \ \epsilon$$

pues $||(x_0 - x) - x_0|| = ||x|| < \delta$. Por lo tanto T es continuo en 0.

Probaremos ahora que (**c**) implica (**d**). Puesto que T es continuo en 0, entonces existe $\delta > 0$ tal que $||Tx|| < 1$ siempre que $||x|| < \delta$. Sea $M = 2/\delta$. Para toda $x \in E$ se cumple que

$$\Big|\Big|\frac{\delta x}{2||x||}\Big|\Big| \ < \ \delta \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \Big|\Big|T\big(\frac{\delta x}{2||x||}\big)\Big|\Big| \ < \ 1.$$

Se concluye ahora que $||Tx|| < \dfrac{2}{\delta}||x|| = M||x||$.

Finalmente probaremos que (**d**) implica (**a**). Sean $x, y \in E$. Entonces

$$||Tx - Ty|| \;=\; ||T(x-y)|| \;\leq\; M||x-y|| \;<\; \epsilon$$

siempre que $||x - y|| < \epsilon/M$. Vemos entonces que de hecho, T es uniformemente continua. ∎

Definición 20. Si $T : E \to F$ es un operador lineal que cumple la condición **(d)** del teorema anterior, entonces se dice que T es un operador acotado. En este caso escribimos

$$||T|| \;=\; \inf\Big\{M \;:\; ||Tx|| \leq M||x|| \;\text{ para cada }\; x \in E\Big\}. \;\; \square$$

Teorema 21. *Si $T : E \to F$ es un operador lineal acotado, entonces $||T||$ es igual a cada una de las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned} ||T||_1 \;&=\; \sup\Big\{||Tx|| \;:\; ||x|| = 1\Big\}, \\ ||T||_2 \;&=\; \sup\Big\{||Tx|| \;:\; ||x|| \leq 1\Big\}, \\ ||T||_3 \;&=\; \sup\Big\{\frac{||Tx||}{||x||} \;:\; ||x|| \neq 0\Big\}. \end{aligned}$$

Demostración. Es claro que $||T||_1 \leq ||T||_2$. Si $||x|| \leq 1$ y $x \neq 0$, entonces

$$||Tx|| \;\leq\; \frac{||Tx||}{||x||}.$$

Tomando el supremo, se obtiene $||T||_2 \leq ||T||_3$.

Si $x \neq 0$, entonces

$$\frac{||Tx||}{||x||} = \left|\left|T\Big(\frac{x}{||x||}\Big)\right|\right| \qquad \text{y además} \qquad \left|\left|\frac{x}{||x||}\right|\right| = 1.$$

Por lo tanto $||T||_3 = ||T||_1$.

En resumen $||T||_1 \leq ||T||_2 \leq ||T||_3 = ||T||_1$.

Ahora bien, puesto que para todo $x \in E$ se cumple la desigualdad $||Tx|| \leq ||T||_3||x||$, entonces $||T|| \leq ||T||_3$. Por otro lado, si $M > ||T||$, entonces $||Tx||/||x|| < M$ siempre que $x \neq 0$ y por lo tanto $||T||_3 \leq M$. Tomando el ínfimo sobre tales M obtenemos que $||T||_3 \leq ||T||$. ∎

Definición 22. Mediante $L(E,F)$ se denota el conjunto de todos los operadores lineales acotados $T : E \to F$. Este conjunto es un espacio lineal con las siguientes operaciones:

$$(T_1 + T_2)x = T_1(x) + T_2(x) \quad \text{y} \quad (aT)x = aT(x), \;\; a \;\text{ escalar.} \;\; \square$$

Teorema 23. *Si $||T||$ es como en la Definición 20, entonces $||T||$ es una norma en $L(E,F)$.*

Demostración. Suponga que T_1 y T_2 son elementos de $L(E,F)$. Para cada $x \in E$, se cumple que

$$||(T_1+T_2)x|| = ||T_1x+T_2x|| \leq ||T_1x||+||T_2x|| \leq ||x||\big(||T_1||+||T_2||\big).$$

Por lo tanto $(T_1 + T_2) \in L(E,F)$ y además $||T_1 + T_2|| \leq ||T_1|| + ||T_2||$.

Supongamos ahora que $T \in L(E,F)$ y a es un escalar. Para cada $x \in E$ se cumple que

$$||aTx|| = |a|\,||Tx|| \leq |a|\,||T||\,||x||.$$

Por lo tanto $aT \in L(E,F)$ y además $||aT|| \leq |a|\ ||T||$. Si $a \neq 0$, entonces

$$||T|| \ = \ \left|\left|\frac{1}{a}\, aT\right|\right| \ \leq \ \frac{1}{|a|}||aT||$$

de modo que $|a|\ ||T|| = ||aT||$. ∎

Definición 24. La topología en $L(E,F)$ derivada de la norma $||\cdot||$ se llama la topología uniforme en el espacio de operadores. Además $||\cdot||$ se llama la norma uniforme. □

Definición 25. La serie infinita

$$\textbf{(26)} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

con términos $x_j \in E$ converge a $x \in E$ si para cada $\epsilon > 0$ existe K tal que $k > K$ implica

$$\left|\left|x - \sum_{j=1}^{k} x_j\right|\right| \ < \ \epsilon.$$

Decimos que la serie (26) converge absolutamente si además se cumple que

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||x_j|| \ < \ \infty. \ \square$$

Teorema 27. *Un espacio normado E es de Banach, si y sólo si cada serie absolutamente convergente en E, converge a un elemento $x \in E$.*

Demostración. Supongamos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \qquad \text{con} \qquad x_j \in E,$$

converge absolutamente. Entonces las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy. En efecto, si K es tal que

$$\sum_{j=K}^{\infty} ||x_j|| \, < \, \epsilon,$$

entonces $p > q > K$ implica que

$$\Big|\Big| \sum_{j=1}^{p} x_j - \sum_{j=1}^{q} x_j \Big|\Big| \, = \, \Big|\Big| \sum_{j=q+1}^{p} x_j \Big|\Big| \, \leq \, \sum_{j=q+1}^{p} ||x_j|| \, < \, \epsilon.$$

Puesto que E es completo, entonces existe $x \in E$, que es el límite de la serie infinita.

Supongamos ahora que E es un espacio normado en el que toda serie absolutamente convergente, converge en E. Sea $\{x_n\} \subset E$ una sucesión de Cauchy. Formemos ahora la siguiente subsucesión $\{y_j\}$ de $\{x_n\}$. Para cada $j \in \mathbf{N}$, sea $n(j)$ tal que $n(j) > n(j-1)$ y si $p, q > n(j)$, entonces $||x_p - x_q|| < 1/2^j$. Sea $y_j = x_{n(j)}$. La serie

$$(y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots$$

converge absolutamente pues

$$||y_{j+1} - y_j|| \, < \, \frac{1}{2^{j-1}}.$$

La enésima suma parcial de esta serie es igual a $y_{n+1} - y_1$. Por lo tanto, si esta serie converge a y, entonces $\{y_n\}$ converge a $y + y_1$. Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces también $\{x_n\}$ converge a $y + y_1$. ∎

Teorema 28. *Sean E un espacio normado y F un espacio de Banach. Entonces $L(E, F)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Suponga que la sucesión $\{T_j\} \subset L(E,F)$ es tal que $\sum ||T_j|| < \infty$. Para cada $x \in E$ tenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||T_j x|| \;\leq\; ||x|| \sum_{j=1}^{\infty} ||T_j|| \;<\; \infty.$$

Por lo tanto existe $Tx \in F$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_j x \;=\; Tx.$$

Es claro que Tx es lineal. La función T es acotada, pues

$$||Tx|| \;\leq\; ||x|| \sum_{j=1}^{\infty} ||T_j||.$$

Para verificar que la serie $\sum T_j$ converge a T, sea $||x|| \leq 1$. Entonces

$$\left|\left|Tx - \sum_{j=1}^{k} T_j x\right|\right| \;\leq\; \sum_{j=k+1}^{\infty} ||T_j|| \;<\; \epsilon$$

siempre que $k > K$. Tomando el supremo sobre todas las $||x|| \leq 1$ vemos que

$$\left|\left|T - \sum_{j=1}^{k} T_j\right|\right| \;<\; \epsilon \qquad \text{siempre que } \; k > K. \;\blacksquare$$

Teorema 29. (Riesz-Fisher). *Sea $1 \leq p < \infty$. Los espacios L^p son completos.*

Demostración. Probaremos que toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathrm{L}^p$ absolutamente convergente, converge a un elemento de L^p. Supongamos pues que

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||f_n|| \;=:\; M \;<\; \infty.$$

Sea

$$g_n(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|.$$

Por la desigualdad de Minkowski, tenemos que

$$||g_n|| \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} ||f_k|| \;\leq\; M.$$

Por lo tanto

$$\int |g_n|^p \;\leq\; M^p.$$

Para cada x, la sucesión $\big\{g_m(x)\big\}$ es no decreciente y por lo tanto, converge a un número $g(x) \in \mathbf{R} \cup \big\{\infty\big\}$. La función g es medible y puesto que $g_n \geq 0$, entonces

$$\int g^p \;\leq\; M^p$$

por el Lema de Fatou. Por lo tanto g^p es integrable y g es finita para casi toda x.

Para cada x tal que $g(x)$ es finito, la serie

$$s_n(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

converge absolutamente a un número $s(x)$. Sea $s(x) = 0$ para cada x tal que $g(x) = \infty$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ se cumple que $s_n(x) \leq g(x)$ y por lo tanto $s(x) \leq g(x)$. Se deduce que $s \in \mathrm{L}^p$ y tenemos

$$|s_n(x) - s(x)|^p \;\leq\; 2^p\big[g(x)\big]^p.$$

Puesto que $2^p g^p$ es integrable y $|s_n(x) - s(x)|^p$ converge a cero para casi toda x, entonces

$$\int |s_n - s|^p \ \to \ 0$$

por el Teorema de Convergencia Dominada. Por lo tanto $||s_n - s|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. ∎

§3. Extensión de Funcionales.

Definición 30. Un operador f de un espacio normado en el campo de escalares, se llama una funcional en E. El conjunto de todas las funcionales en E, se llama el espacio dual de E y se denota E^*. El espacio dual de un espacio normado es siempre un espacio de Banach. □

Definición 31. Sea E un espacio lineal real. Una forma sublineal es una función $p\colon E \to \mathbf{R}$ tal que $p(ax) = ap(x)$ siempre que $a > 0$ y tal que para todo $x, y \in E$, se cumple

$$p(x+y) \ \leq \ p(x) + p(y). \ \square$$

Ejemplo 32. Una norma en E es una forma sublineal. Las funcionales lineales también son formas sublineales. □

Teorema 33. (Hahn-Banach). *Sea p una forma sublineal definida en el espacio lineal real E. Sea f una funcional lineal definida en el subespacio $F \subset E$ tal que $f(x) \leq p(x)$ para toda $x \in F$. Entonces existe una funcional*

$$\hat{f}\colon E \to \mathbf{R}$$

que satisface las siguientes propiedades.

(a) *$\hat{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in F$.*

(b) *$\hat{f}(x) \leq p(x)$ para cada $x \in E$.*

De este modo, $\hat{f}$ es la extensión de f a todo el espacio E. Esta extensión está dominada por la forma sublineal p.

La demostración del Teorema de Hahn-Banach depende del Lema de Zorn, el cual es una de las formas equivalentes del Axioma de Elección de la teoría de los conjuntos.

Definición 34. Sea $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos. Una subcolección $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ se llama una cadena, si para cada $A, B \in \mathcal{B}$ se cumple que $A \subset B$ o bien $B \subset A$.

Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ se llama maximal, si no existe $B \in \mathcal{A}$, $B \neq A$ tal que $A \subset B$.

Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ se llama minimal, si no existe $B \in \mathcal{A}$, $B \neq A$ tal que $B \subset A$. $\square$

Lema 35. (de Zorn). *Sea $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos.*

(a) *Si para cada cadena $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ el conjunto*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

pertenece a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ contiene un elemento maximal.

(b) *Si para cada cadena $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ el conjunto*

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$$

pertenece a $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ contiene un elemento minimal.

Ejemplo 36. Sea $\mathcal{A} = \big\{(0,r) \,:\, 0 < r < 1\big\}$. Sea $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Es claro que $\mathcal{B}$ es una cadena. El conjunto

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \;=\; (0,1) \;\notin \mathcal{A}.$$

También es cierto que $\mathcal{A}$ no contiene un elemento maximal.

Demostración del Teorema 33. Usaremos el Lema de Zorn para obtener una extensión maximal de f. Si el dominio de esta extensión no es todo E, entonces todavía se puede obtener una extensión aun mayor.

Sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los subconjuntos de $E \times \mathbf{R}$ que son de la forma

$$[G,g] \;=\; \Big\{\big(x, g(x)\big) \;:\; x \in G\Big\}$$

en donde G es un subespacio que contiene a F y g es una funcional lineal en G que satisface la condición **(a)** de teorema, así como la desigualdad **(b)** para todo $x \in G$. El conjunto $[G,g]$ se llama la gráfica de g. Nótese que $[F,f] \in \mathcal{A}$ de modo que $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{B}$ una cadena en $\mathcal{A}$. Sean $[G_\alpha, g_\alpha]$ y $[G_\beta, g_\beta]$ elementos de la cadena $\mathcal{B}$. Supongamos que $[G_\alpha, g_\alpha] \subset [G_\beta, g_\beta]$. En este caso, para cada $x \in G_\alpha$ se cumple que $\big(x, g_\alpha(x)\big) \in [G_\beta, g_\beta]$. Esto implica que G_α es un subespacio de G_β y que g_β es una extensión de g_α.

Es fácil ver que

$$G \;=\; \bigcup_{\mathcal{B}} G_\alpha$$

(la unión es sobre todas las α tales que $[G_\alpha, g_\alpha] \in \mathcal{B}$) es un subespacio de E. Podemos ahora definir la funcional

$$g : G \to \mathbf{R}$$

mediante $g(x) = g_\alpha(x)$ en donde α es cualquier índice tal que $x \in G_\alpha$. También es fácil comprobar que

$$[G, g] \;=\; \bigcup_{\mathcal{B}} \, [G_\alpha, g_\alpha]$$

(la unión de todos los elementos de $\mathcal{B}$). Puesto que $[G, g] \in \mathcal{A}$, el Lema de Zorn implica ahora que $\mathcal{A}$ contiene un elemento maximal $[E_1, \hat{f}]$.

Probaremos que $E_1 = E$. En caso contrario existe $y \in E \setminus E_1$. Para cada $s > 0$ y $x \in E$ tenemos

$$2\hat{f}\big(\frac{x}{s}\big) \;\le\; 2p\big(\frac{x}{s}\big) \;\le\; p\big(\frac{x}{s} + y\big) + p\big(\frac{x}{s} - y\big)$$

de modo que

$$\hat{f}\big(\frac{x}{s}\big) - p\big(\frac{x}{s} - y\big) \;\le\; p\big(\frac{x}{s} + y\big) - \hat{f}\big(\frac{x}{s}\big).$$

Sean

$$A \;=\; \inf\Big\{p\big(\frac{x}{s} + y\big) - \hat{f}\big(\frac{x}{s}\big) \;:\; s > 0\Big\},$$

$$a \;=\; \sup\Big\{\hat{f}\big(\frac{x}{s}\big) - p\big(\frac{x}{s} - y\big) \;:\; s > 0\Big\}.$$

Entonces $a \le A$. Sea c un número real cualquiera tal que $a \le c \le A$. Defina la funcional f^* en el espacio lineal E_2 que es el espacio generado por E_1 y y, mediante

$$f^*(x + ty) \;=\; \hat{f}(x) + ct.$$

Es claro que la funcional f^* satisface la condición **(a)** del teorema. Para probar que f^* satisface la desigualdad **(b)** suponga primero que $t > 0$. Puesto que

$$c \;\le\; p\big(\frac{x}{t} + y\big) - \hat{f}\big(\frac{x}{t}\big)$$

entonces

$$f^*(x+ty) \;=\; \hat{f}(x) + ct \;\leq\; p(x+ty).$$

Si $t < 0$, sea $s = -t$. Puesto que

$$c \;\geq\; \hat{f}\big(\frac{x}{s}\big) - p\big(\frac{x}{s} - y\big)$$

entonces

$$f^*(x+ty) \;=\; \hat{f}(x) + ct \;=\; \hat{f}(x) - cs \;\leq\; p(x - sy) \;=\; p(x+ty).$$

Puesto que f^* satisface las condiciones **(a)** y **(b)** del teorema, entonces se sigue que $[E_2, f^*]$ contiene propiamente a $[E_1, \hat{f}]$, contradiciendo así que $[E_1, \hat{f}]$ sea maximal. ∎

El siguiente resultado es la versión del Teorema de Hahn-Banach para espacios normados.

Teorema 37. *Sea F un subespacio de un espacio normado E. Sea f una funcional lineal acotada definida en F. Entonces existe una funcional lineal $\hat{f}$ en E tal que $||\hat{f}|| = ||f||$ y además $\hat{f}(x) = f(x)$ para cada $x \in F$.*

Demostración. Supongamos primero que E es un espacio normado real. Sea $M = ||f||$. Entonces $p(x) = M\,||x||$ es una forma sublineal en E. También es cierto que $|f(x)| \leq M\,||x|| = p(x)$. Por lo tanto existe una extensión $\hat{f}$ de f a todo E tal que $|\hat{f}(x)| \leq M\,||x||$ para cada $x \in E$. Esto implica que $||\hat{f}|| = ||f||$.

Supongamos ahora que E es un espacio normado complejo. Podemos considerar a E como espacio real restringiendo la multiplicación por escalares al campo $\mathbf{R}$. Si f es una funcional lineal en E, entonces

$$f(x) \;=\; f_1(x) + i f_2(x)$$

en donde f_1 y f_2 son funcionales reales de E. Es fácil ver que f_1 y f_2 son ambas funcionales reales en E cuando restringimos los escalares a **R**. Puesto que

$$f_1(ix) + if_2(ix) \;=\; f(ix) \;=\; if(x) \;=\; if_1(x) - f_2(x)$$

entonces $f_1(ix) = -f_2(x)$. Por lo tanto

$$f(x) \;=\; f_1(x) - if_1(ix).$$

Supongamos que f es una funcional lineal compleja en el subespacio $F \subset E$ tal que $||f|| = M$. Si f_1 es la parte real de f en la descomposición anterior, entonces para cada $x \in F$ tenemos

$$|f_1(x)| \;=\; |\Re\mathrm{e}\big(f(x)\big)| \;\leq\; |f(x)| \;\leq\; M\,||x||$$

y por lo tanto $||f_1|| \leq M$. Sea $\hat{f}_1$ una extensión de f_1 a E tal que $||\hat{f}_1|| \leq M$. Defina

$$\hat{f}(x) \;=\; \hat{f}_1(x) - i\hat{f}_1(ix).$$

Si $||x|| \leq 1$, sea c un número complejo tal que $c\hat{f}(x) = |\hat{f}(x)|$ y $|c| = 1$. Puesto que $\hat{f}(cx)$ es real, entonces

$$|\hat{f}(x)| \;=\; \hat{f}(cx) \;=\; f_1(cx) \;\leq\; M\,||cx|| \;=\; M\,||x||.$$

Esto prueba que $|\hat{f}(x)| \leq M\,||x||$ para todo $x \in E$. Puesto que $||f|| = M$ como funcional en F, entonces también $||\hat{f}|| = M$. ∎

Corolario 38. *Para cada $x \in E$, $x \neq 0$, existe una funcional lineal continua f en E tal que $||f|| = 1$ y además $f(x) = ||x||$.*

Demostración. Sea $F = \big\{ax \;:\; a \text{ escalar}\big\}$ el subespacio generado por $x \in E$. Defina f_1 en F mediante $f_1(ax) = a||x||$. Puesto que

$|f_1(ax)| = |a|\,||x|| = ||ax||$, entonces $||f_1|| = 1$. Si f es una extensión de f_1 a todo E, entonces $f(x) = f_1(x) = ||x||$. ∎

Corolario 39. *Suponga que F es un subespacio cerrado del espacio normado E y que $x \in E \setminus F$. Entonces existe una funcional lineal f en E tal que $||f|| = 1$, $f(y) = 0$ para cada $y \in F$ y además*

$$f(x) \;=\; \mathrm{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} ||x - y||.$$

Demostración. Defina f_1 en el espacio generado por x y F,

$$\Big\{ax + y \;:\; a \text{ escalar},\; y \in F\Big\},$$

mediante $f_1(ax + y) = ad$ con $d = \mathrm{dist}(x, F)$. Si $||ax + y|| \leq 1$ y $a \neq 0$, entonces

$$d \;\leq\; \left|\left|x + \frac{1}{a}\,y\right|\right| \;\leq\; \frac{1}{|a|}$$

y por lo tanto $|f_1(ax + y)| = d|a| \leq 1$. Para ver que $||f_1|| = 1$, sea $\epsilon > 0$. Sea $y \in F$ tal que $||x - y|| < d + \epsilon$. Si $u = (x - y)/||x - y||$ entonces $||u|| = 1$ y además

$$f_1(u) \;=\; \frac{d}{||x - y||} \;\geq\; \frac{d}{d + \epsilon}.$$

Puesto que $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces $||f_1|| = 1$. Por el Teorema de Hahn-Banach la funcional f_1 se puede extender a todo E. ∎

§4. Acotación Uniforme.

Usaremos el Teorema de Baire para probar el siguiente resultado conocido como el Principio de Acotación Uniforme.

Teorema 40. (Banach-Steinhaus). *Sea* $\{T_n\}$ *una sucesión de operadores lineales continuos, de un espacio de Banach* E *a un espacio normado* F. *Suponga que para toda* $x \in E$ *se cumple que* $\sup ||T_n x|| < \infty$. *Entonces* $\sup ||T_n|| < \infty$.

Demostración. Para cada par m, n de enteros positivos, sea $C_{m,n}$ el conjunto de todas las $x \in E$ tales que $||T_m x|| \leq n$. Puesto que T_n es un operador continuo, entonces cada $C_{m,n}$ es cerrado. Por lo tanto

$$C_n \ = \ \bigcap_{m=1}^{\infty} C_{m,n}$$

también es cerrado. Puesto que $\sup ||T_n x|| < \infty$ para cada $x \in E$, entonces

$$E \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Por el Teorema de Baire, alguno de estos C_k tiene interior no vacio. Si x_0 es un punto interior de C_k, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) = \{x : ||x - x_0|| < \epsilon\}$ está contenido en C_k. Por lo tanto, si $||x - x_0|| < \epsilon$ entonces $||T_n x|| < k$ para toda n. Si $||y|| < \epsilon$, entonces

$$||T_n y|| \ = \ ||T_n(y + x_0) - T_n(x_0)||$$

$$\leq \ ||T_n(y + x_0)|| + ||T_n(x_0)|| \ \leq \ k + ||T_n(x_0)||.$$

Si $||y|| < 1$, entonces para cada n

$$||T_n y|| \ = \ \frac{1}{\epsilon}||\epsilon T_n y|| \ \leq \ \frac{1}{\epsilon}\Big(k + ||T_n x_0||\Big)$$

y por lo tanto $\sup\limits_n ||T_n|| \ \leq \ \dfrac{2k}{\epsilon}$. ∎

Usaremos el Principio de Acotación Uniforme para probar que existen funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en al menos un punto. Por lo tanto, el hecho de que una función sea continua no es condición suficiente para que su serie de Fourier converga en todas partes.

Ejemplo 41. Consideremos el espacio $C[0,1]$ de funciones continuas, equipado con la norma uniforme

$$||f|| \;=\; \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|.$$

La enésima suma parcial de la serie de Fourier de $f \in C[0,1]$ está dada en $x = 0$, mediante la funcional

$$T_n : C[0,1] \to \mathbf{R} \qquad \text{con} \qquad T_n(f) \;=\; \int_0^1 f(t) D_n(t)\, dt$$

en donde $D_n(t)$ es el núcleo de Dirichlet

$$D_n(t) \;=\; \frac{\operatorname{sen} \pi(2n+1)t}{\operatorname{sen} \pi t}.$$

Para cada $f \in C[0,1]$ tenemos que

$$|T_n(f)| \;\leq\; ||f|| \int_0^1 |D_n(t)|\, dt$$

y por lo tanto, la funcional lineal T_n está acotada:

$$||T_n|| \;\leq\; \int_0^1 |D_n(t)|\, dt.$$

Sea

$$g(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } D_n(x) > 0, \\ -1 & \text{si } D_n(x) \leq 0. \end{cases}$$

Para cada $\epsilon > 0$ existe $g_\epsilon \in C[0,1]$ tal que $||g_\epsilon|| = 1$ y además $g_\epsilon(x) = g(x)$ para toda $x \in [0,1] \setminus B$ en donde $B \subset [0,1]$ es un conjunto de medida menor que $\epsilon/2$. Por lo tanto,

$$T_n(g_\epsilon) \geq T_n(g) - \epsilon = \int_0^1 |D_n(t)|\, dt - \epsilon.$$

Se deduce entonces que $||D_n|| = \int_0^1 |D_n(t)|\, dt$. Mostraremos ahora que

$$\int_0^1 |D_n(t)|\, dt \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty.$$

Puesto que $\operatorname{sen} u \leq u$ cuando $0 \leq u \leq \pi$, entonces

$$\int_0^\pi \left| \frac{\operatorname{sen}(2n+1)u}{\operatorname{sen} u} \right| du \geq \int_0^\pi \left| \frac{\operatorname{sen}(2n+1)u}{u} \right| du$$

$$= \int_0^{(2n+1)\pi} \left| \frac{\operatorname{sen} u}{u} \right| du = \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\operatorname{sen} u}{u} \right| du$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen} u|\, du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \to \infty$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $||T_n||$ no está acotada. Por el Principio de Acotación Uniforme, existe $f \in C[0,1]$ cuya serie de Fourier diverge en $x = 0$. $\square$

§5. Ejercicios.

Ejercicio 42. Pruebe que en un espacio de Banach toda sucesión $\{x_n\}$ que converge a cero, contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que la serie $\sum x_{n_k}$ es convergente.

Ejercicio 43. Pruebe que el subespacio de todos los polinomios no es cerrado en $C[0,1]$ bajo la norma del supremo, ni tampoco bajo la norma inducida por el producto interno $(f,g) = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$.

Ejercicio 44. Pruebe que la norma del supremo $||\cdot||_\infty$ y el producto interno $(f,g) = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$ definen topologías distintas en $C[0,1]$.

Sugerencia. Existe una sucesión de funciones $\{f_n\}$ tal que $||f_n||_\infty = 1$ para todo n pero $(f_n, f_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 45. Sean E y F dos espacios normados. Sea $\{T_n\} \subset L(E,F)$ y sea $\{x_n\} \subset E$. Suponga que $T_n \to T$ y que $x_n \to x$. Pruebe que $T_n x_n \to Tx$.

Ejercicio 46. Sea c_0 el subespacio de ℓ^∞ que consiste de todas las sucesiones $\{x_n\}$ tales que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pruebe que c_0 es cerrado en ℓ^∞ bajo la norma del supremo $||\cdot||_\infty$.

Ejercicio 47. Exhibir una sucesión divergente de elementos de ℓ^1 que converge en ℓ^2. Pruebe que $\ell^1 \subset \ell^2$. Discutir la situación con respecto a ℓ^p y ℓ^q en donde $p < q$.

Ejercicio 48. Sea $\{r_n\}$ una enumeración de los racionales en $[0,1]$. Para $x \in [0,1]$ sea

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

Pruebe que $f(x)$ es continua en cada $x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$ pero discontinua en cada $x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$.

Solución. Sea $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$ y sea $\epsilon > 0$. Sea $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} \, < \, \epsilon$$

y sea $\delta = \min\{|r_n - x_0| : 1 \leq n \leq N\}$. Entonces $\delta > 0$. Sea $|x - x_0| < \delta$. Entre x y x_0 no existe ningún racional de la lista $r_1, \ldots, r_N$ y por lo tanto

$$|f(x) - f(x_0)| \, \leq \, \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} \, < \, \epsilon.$$

Por lo tanto f es continua en x_0.

Sea $x_0 \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$. Entonces $x_0 = r_m$ para algún $m \in \mathbf{N}$. Sea $0 < \epsilon < 1/2^m$. Para todo $\delta > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $1/2^N < \delta$. Por lo tanto $x = x_0 + 1/2^N$ es tal que $r_m < x$ y también $|x - x_0| < \delta$, sin embargo

$$|f(x) - f(x_0)| \, \geq \, \frac{1}{2^m} \, > \, \epsilon. \; \blacksquare$$

Ejercicio 49. Es imposible construir una función $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, continua en cada racional y discontinua en cada irracional.

Ejercicio 50. Sea $0 < \xi < 1$. Considere la funcional lineal F definida para cada $x \in C[0,1]$ mediante

$$F(x) \, = \, x(\xi).$$

Pruebe que F es continua bajo la norma del supremo, pero no bajo la norma de $\mathrm{L}^2(0,1)$.

Ejercicio 51. Considere el operador de Volterra V definido para cada $x \in \mathrm{L}^2(0,1)$ mediante

$$(Vx)(t) \;=\; \int_0^t x(\xi)\, d\xi, \qquad \text{para } \; t \in (0,1).$$

Pruebe que V es acotado y que $||V|| \leq 1/\sqrt{2}$.

Ejercicio 52. Calcular la norma de la funcional lineal

$$F(x) \;=\; \int_0^1 t\, x(t)\, dt, \qquad \text{para } \; x \in C[0,1].$$

Encontrar $x \in C[0,1]$ tal que $|F(x)| = ||F||$.

Ejercicio 53. Sea $\widetilde{H}^k(0,1)$ el conjunto de todas las funciones f tales que para cada $n \leq k$, la n-ésima derivada de f existe y es tal que $f^{(n)} \in \mathrm{L}^2(0,1)$. En $\widetilde{H}^k(0,1)$ se define el producto interno

$$(f,g)_k \;=\; \int_0^1 \sum_{n=0}^{k} \frac{d^n f}{dt^n}\, \overline{\frac{d^n g}{dt^n}}\, dt.$$

Exhibir una sucesión $\{f_n\} \subset \widetilde{H}^1(0,1)$ tal que $(f_n, f_n)_0 \to 0$ pero por otro lado $(f_n, f_n)_1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 54. Sea

$$g(x) \;=\; \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Pruebe que $g \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$ pero $g \notin \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$.

Ejercicio 55. Sea $f(x) = \min\{1, 1/|x|\}$. Pruebe que $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$ pero $f \notin \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$.

Ejercicio 56. Demuestre que $\mathrm{L}^2(0,1) \subset \mathrm{L}^1(0,1)$.

Sugerencia. Si $x > 1$ entonces $x < x^2$.

Ejercicio 57. Sea E un espacio de Banach con respecto a cada una de las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$. Suponga que existe una constante C tal que $||x||_1 \leq C||x||_2$ para cada $x \in E$. Demuestre que existe una constante K tal que $||x||_2 \leq K||x||_1$ para cada $x \in E$.

Ejercicio 58. Considere el espacio $E = C[0,1]$ con las dos normas

$$||x||_1 \; = \; \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \qquad \text{y} \qquad ||x||_2 \; = \; \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Demuestre que existe una constante C tal que $||x||_2 \leq C||x||_1$ pero no existe K tal que $||x||_1 \leq K||x||_2$.

Ejercicio 59. Considere la función. función $f(x) = x^{-1}\mathrm{sen}\, x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$. Decir, con demostración, si $f(x)$ es integrable en el sentido de Lebesgue y en el sentido de Riemann.

Capítulo 6

MARTINGALAS

§1. Introducción.

La medida de Lebesgue m definida en un conjunto $A \in \mathbf{R}$ de medida uno, $m(A) = 1$, es un caso particular de una medida de probabilidad $\mathbf{P}$ definida en un conjunto Ω. En este capítulo escribiremos $\mathbf{P}$ en lugar de m, la medida de Lebesgue, de modo que $\mathbf{P} = m$. También escribiremos $\Omega = [0, 1]$ de modo que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Definición 1. Una sigma álgebra $\mathcal{F}$ definida en Ω es una colección de subconjuntos de Ω tales que:

(a) El conjunto vacio $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{F}$.

(b) Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $\widetilde{A} \in \mathcal{F}$, en donde $\widetilde{A} = \Omega \setminus A$.

(c) Si $A_j \in \mathcal{F}$ para cada $j \in \mathbf{N}$ entonces

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}.$$

E Teorema 15 del Capítulo 3, implica que la colección de todos los subconjuntos de Ω medibles en el sentido de Lebesgue, es una sigma álgebra. Denotaremos esta sigma álgebra mediante $\mathcal{F}_0$. □

Definición 2. Una sucesión $\{\mathcal{F}_j\}$ de sigma álgebras, tal que

$$\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_0 \qquad \text{y además} \qquad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$$

se llama una filtración. □

Ejemplo 3. Para $j \in \mathbf{N}$, sea $\mathcal{P}_j$ una sucesión anidada de particiones finitas de Ω, de modo que $\mathcal{P}_{j+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{P}_j$. Suponemos que si $I \in \mathcal{P}_j$ entonces I es un intervalo tal que $P(I) > 0$. Una partición $\mathcal{P}_j$ induce una sigma álgebra $\mathcal{F}_j$. En efecto, los elementos de $\mathcal{F}_j$ son uniones de las partes $I \in \mathcal{P}_j$. Es fácil ver que $\{\mathcal{F}_j\}$ es una filtración de Ω. $\square$

En este capítulo escribiremos

$$\{f \leq x\} \quad \text{en lugar de} \quad \{\omega \in \Omega \,:\, f(\omega) \leq x\}.$$

Dada una una función f y una sigma álgebra $\mathcal{F}$, decimos que f es $\mathcal{F}$ medible siempre que $\{f \leq x\} \in \mathcal{F}$ para cada $x \in R$,

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{F}$ una sigma álgebra de subconjuntos de Ω. Sea f una función $\mathcal{F}$ medible tal que $\int_A f = 0$ para cada $A \in \mathcal{F}$. Se cumple entonces que $f = 0$ casi en todas partes.

Solución. Sea $A_j = \{f \geq 1/j\}$. Puesto que f es $\mathcal{F}$ medible, entonces $A_j \in \mathcal{F}$ para cada $j \in \mathbf{N}$ y por lo tanto

$$\mathbf{P}\{f > 0\} \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_j\} \;\leq\; \sum_{j=1}^{\infty} j \int_{A_j} f(x)\,dx \;=\; 0.$$

Por lo tanto $f \leq 0$ casi en todas partes. El mismo argumento con $-f$ en lugar de f prueba que $f \geq 0$ casi en todas partes. $\blacksquare$

Ahora vamos a definir el muy importante concepto de esperanza condicional de una función f con respecto a una sigma álgebra. Como una consequencia del Teorema de Radon-Nikodym, en la sección $\S*$ se probará, con generalidad, la existencia de la esperanza condicional. Por otra parte, en el Ejemplo 6 se dan expresiones explícitas de esperanzas condicionales.

Definición 5. Sea $f:\Omega\to\mathbf{R}$ una función integrable. Sea $\mathcal{F}$ una sigma álgebra de Ω. La esperanza condicional de f dada $\mathcal{F}$ es la función $\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle:\Omega\to\mathbf{R}$ que satisface:

(a) Para cada $x\in\mathbf{R}$ se cumple $\big\{\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle\le x\big\}\in\mathcal{F}$.

(b) Para cada $A\in\mathcal{F}$ se cumple

$$\int_A \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle(x)\,dx \;=\; \int_A f(x)\,dx. \;\square$$

Una esperanza condicional no está univocamente determinada por las condiciones **(a)** y **(b)** de la Definición 5. Sin embargo, dada una función g que es $\mathcal{F}$ medible y tal que $\int_A g=\int_A f$ para cada $A\in\mathcal{F}$, el Ejercicio 4 implica que $g=\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle$ casi en todas partes.

Ejemplo 6. Sea $\mathcal{F}=\mathcal{F}_j$ una de las sigma álgebras consideradas en el Ejemplo 3, es decir, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_j$ está inducida por la partición $\mathcal{P}_j$. Sea $f:\Omega\to\mathbf{R}$ una función integrable. Entonces, para cada $\omega\in\Omega$,

$$\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle(\omega)=\frac{1}{\mathbf{P}(I)}\int_I f(x)\,dx \tag{7}$$

en donde $I\in\mathcal{P}_j$ es tal que $\omega\in I$. La propiedad (**a**) de la Definición 5 se cumple ya que $\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle$ definida en (7) es constante en cada parte $I\in\mathcal{P}_j$.

Si $I\in\mathcal{P}_j$ entonces $\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle$ es constante en I. Por lo tanto

$$\int_I \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle\,dx \;=\; \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle\int_I dx \;=\; \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle\,\mathbf{P}(I) \;=\; \int_I f(x)\,dx.$$

De forma similar se prueba que la propiedad (**b**) de la Definición 5 se cumple para cualquier $A\in\mathcal{F}$. $\square$

Ejercicio 8. Demuestre que si $g : \Omega \to \mathbf{R}$ es $\mathcal{F}$ medible, entonces

$$\mathbf{E}\langle fg|\mathcal{F}\rangle \;=\; g\,\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle.$$

Definición 9. Sea $\{F_j\}$ una filtración de Ω. Sea $\{f_j\}$ una sucesión de funciones tales que f_j es $\mathcal{F}_j$ medible y además $f_j \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Suponga que

$$\mathbf{E}\langle f_{j+1}|\mathcal{F}_j\rangle \;=\; f_j \quad \text{para cada} \quad j \in \mathbf{N}.$$

Se dice entonces que $\{f_j\}$ es una martingala. Cuando $\mathbf{E}\langle f_{j+1}|\mathcal{F}_j\rangle \geq f_j$ para cada $j \in \mathbf{N}$, entonces se dice que $\{f_j\}$ es una submartingala. $\square$

Ejemplo 10. Sea $\{\mathcal{F}_j\}$ la filtración del Ejemplo 3. Sea $f_j = \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}_j\rangle$ como en el Ejemplo 6. Entonces $\{f_j\}$ es una martingala. En efecto, sea $\omega \in \Omega$ y sea $I \in \mathcal{P}_j$ tal que $\omega \in I$. Suponga que $A, B \in \mathcal{P}_{j+1}$ son tales que $I = A \cup B$ y además $A \cap B = \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\langle f_{j+1}|F_j\rangle(\omega) \;&=\; \frac{1}{\mathbf{P}(I)} \int_I \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}_{j+1}\rangle\, dx \\
&=\; \frac{1}{\mathbf{P}(I)} \left[\int_A \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}_{j+1}\rangle\, dx + \int_B \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}_{j+1}\rangle\, dx \right].
\end{aligned}$$

Por la propiedad (**b**) de la Definición 5, esta última expresión es

$$\frac{1}{\mathbf{P}(I)} \left[\int_A f(x)\, dx + \int_B f(x)\, dx \right] \;=\; \frac{1}{\mathbf{P}(I)} \int_I f(x)\, dx \;=\; f_j(\omega). \;\square$$

Ejercicio 11. Sean $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ dos sigma álgebras. Pruebe que

$$\mathbf{E}\langle \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle|\mathcal{G}\rangle \;=\; \mathbf{E}\langle f|\mathcal{G}\rangle.$$

§2. Teorema Límite de Doob.

En el Ejemplo 10 se consideraron martingalas de la forma $\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}_j\rangle$. Dada una martingala $\{f_j\}$, es natural la pregunta de cuándo esta martingala es de la forma $\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}_j\rangle$ para alguna función $f:\Omega \to \mathbf{R}$. El objetivo de este apartado y el siguiente es dar una respueta a esta pregunta.

Una función ϕ es convexa si todas sus lineas tangentes yacen por debajo de la gráfica de ϕ. A continuación se enuncia una definición más precisa de la noción de convexidad.

Definición 12. Una función $\phi\colon\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es convexa, si

$$\phi(x) \;=\; \sup_{\ell\in L} \ell(x)$$

en donde $L = \big\{\ell(\xi) = a\xi + b \;:\; \ell(\xi) \leq \phi(\xi) \;\text{ para cada }\; \xi \in \mathbf{R}\big\}$. □

La siguiente se conoce como la Desigualdad de Jensen.

Proposición 13. (J. Jensen). *Si ϕ es convexa, entonces*

$$\phi(\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle) \;\leq\; \mathbf{E}\langle \phi(f)|\mathcal{F}\rangle.$$

Demostración. Si $\ell \in L$ entonces $\sup\limits_{\ell\in L} \ell(f) \geq \ell(f)$. Por lo tanto

$$\mathbf{E}\langle \phi(f)|\mathcal{F}\rangle \;=\; \mathbf{E}\langle \sup_{\ell\in L} \ell(f)|\mathcal{F}\rangle \;\geq\; \mathbf{E}\langle \ell(f)|\mathcal{F}\rangle \;=\; \ell(\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle)$$

en donde la última igualdad se debe a que ℓ es lineal. Tomando supremo vemos que

$$\mathbf{E}\langle \phi(f)|\mathcal{F}\rangle \;\geq\; \sup_{\ell\in L} \ell(\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle) \;=\; \phi(\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}\rangle). \;\blacksquare$$

Ejemplo 14. Sea $\{f_n\}$ una martingala y sea ϕ una función convexa. Por la Desigualdad de Jensen se cumple que

$$\mathbf{E}\langle\phi(f_{j+1})|\mathcal{F}_j\rangle \;\geq\; \phi(\mathbf{E}\langle f_{j+1}|\mathcal{F}_j\rangle) \;=\; \phi(f_j).$$

Por lo tanto $\{\phi(f_j)\}$ es submartingala.

Si $\{f_j\}$ es una submartingala y ϕ es convexa y no decreciente, entonces

$$\mathbf{E}\langle\phi(f_{j+1})|\mathcal{F}_j\rangle \;\geq\; \phi(\mathbf{E}\langle f_{j+1}|\mathcal{F}_j\rangle) \;\geq\; \phi(f_j).$$

Por lo tanto $\{\phi(f_j)\}$ es submartingala. $\square$

Definición 15. Sea $\{f_j\}$ una submartingala con repecto a la filtración $\{\mathcal{F}_j\}$, de modo que $\mathbf{E}\langle f_{j+1}|\mathcal{F}_j\rangle \geq f_j$. Sean $a < b$ dos números reales. Consideremos ahora las variables auxiliares definidas mediante

$$\phi_0 = 0 \quad \text{y para} \quad j \in \mathbf{N} \quad \text{mediante} \quad \phi_j \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_{j-1} = 0 \text{ y } f_j < a, \\ 1 & \text{si } \phi_{j-1} = 1 \text{ y } f_j < b, \\ 0 & \text{en otro caso}, \end{cases}$$

Se cumple entonces que

$$U_n(a,b) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \chi_{\{\phi_{j-1}-\phi_j=1\}}$$

es el número de veces que $\{f_j\}$ cruza el intervalo $[a,b]$ en dirección ascendente cuando $1 \leq j \leq n$. En otras palabras, $U_n(a,b)$ es el número de veces que la sucesión $\phi_1, \ldots, \phi_n$ pasa de 1 a 0. $\square$

El Teorema 18 que sigue, se llama Teorema de Convergencia para Submartingalas de Doob. El lema auxiliar que sigue se conoce como Desigualdad de Cruces Ascendentes de Doob.

Escribiremos $\mathbf{E}\, f$ en lugar de $\mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}_0\rangle$. En particular $\mathbf{E}\, f = \int_\Omega f$.

Ejercicio 16. (Suma por partes). Pruebe que

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1})b_j + \sum_{j=1}^{n}(b_j - b_{j-1})a_{j-1} \;=\; a_n b_n - a_0 b_0.$$

Lema 17. (J.L. Doob). *Sean $\{f_j\}$ y $U_n(a,b)$ como en la Definición 14. Se cumple entonces que*

$$\mathbf{E}\, U_n(a,b) \;\leq\; \frac{1}{b-a}\mathbf{E}(f_n - a)^{+}.$$

Demostración. Sea $g_0 = 0$ y para $j \in \mathbf{N}$ sea $g_j = (f_j - a)^{+}$. Puesto que $\{f_j\}$ es submartingala y $h(x) = (x)^{+}$ es convexa y no decreciente, entonces $\{g_j\}$ es submartingala. Se cumple entonces que

$$(\phi_{j-1} - \phi_j)\, g_j \quad \text{es} \quad \begin{cases} \text{mayor que cero si } \phi_{j-1} - \phi_j = 1, \\ \text{igual a cero si } \phi_{j-1} - \phi_j \neq 1. \end{cases}$$

En efecto, si $\phi_{j-1} - \phi_j = -1$, entonces $\phi_{j-1} = 0,\ \phi_j = 1$ y $g_j = 0$. Si $\phi_{j-1} - \phi_j = 1$, entonces $g_j > b - a$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}(g_j - g_{j-1})\phi_{j-1} \;&=\; \phi_n g_n - \sum_{j=1}^{n}(\phi_j - \phi_{j-1})g_j \\
&\geq\; \sum_{j=1}^{n}(\phi_{j-1} - \phi_j)g_j \;=\; \sum_{j=1}^{n} g_j\, \chi_{\{\phi_{j-1}-\phi_j=1\}} \\
&\geq\; (b-a)\sum_{j=1}^{n}\chi_{\{\phi_{j-1}-\phi_j=1\}} \;=\; (b-a)U_n(a,b).
\end{aligned}$$

Puesto que $\{g_j\}$ es submartingala, entonces

$$0 \;\leq\; \mathbf{E}\langle g_j|\mathcal{F}_{j-1}\rangle - g_{j-1} \;=\; \mathbf{E}\langle g_j - g_{j-1}|\mathcal{F}_{j-1}\rangle.$$

Puesto que $\phi_{j-1} \leq 1$, entonces

$$\phi_{j-1}\,\mathbf{E}\langle g_j - g_{j-1}|\mathcal{F}_{j-1}\rangle \;\leq\; \mathbf{E}\langle g_j - g_{j-1}|\mathcal{F}_{j-1}\rangle.$$

Puesto que ϕ_j es $\mathcal{F}_j$ medible, entonces ϕ_{j-1} entra dentro del símbolo $\mathbf{E}\langle g_j|\mathcal{F}_{j-1}\rangle$, ver el Ejercicio 8. Con $A = \Omega$, la propiedad (**b**) de la Definición 5 implica que

$$\mathbf{E}\big\{(g_j - g_{j-1})\,\phi_j\big\} \;\leq\; \mathbf{E}\,(g_j - g_{j-1}).$$

Finalmente, tenemos que

$$(b-a)\,\mathbf{E}\,U_n(a,b) \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,g_j - \mathbf{E}\,g_{j-1} \;=\; \mathbf{E}\,g_n \;=\; \mathbf{E}\,(f_n - a)^+. \;\blacksquare$$

Podemos ahora probar el Teorema de Límite de Doob.

Teorema 18. (J.L. Doob). *Sea* $\big\{f_j \,:\, j \in \mathbf{N}\big\}$ *una submartingala con respecto a la filtración* $\big\{\mathcal{F}_j\big\}$. *Suponga que*

$$M < \infty \qquad \textit{en donde} \qquad M := \sup_n \mathbf{E}\,|f_n|.$$

Entonces existe una función medible $f:\Omega \to \mathbf{R}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; f(\omega) \quad \textit{para casi toda} \quad \omega \in \Omega.$$

Demostración. Sea $a < b$. Sea $U_n = U_n(a,b)$ el número de cruces ascendentes de $\big\{f_j\big\}$ sobre $[a,b]$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces

$$\mathbf{E}\,U_n \;\leq\; \frac{\mathbf{E}(f_n - a)^+}{b-a} \;\leq\; \frac{M + |a|}{b-a}.$$

Nótese que U_n es no decreciente como función de n. Sea $U_0(\omega) = \lim_{n\to\infty} U_n(\omega)$. Sea

$$A_{a,b} \;=\; \Big\{\omega \in \Omega \,:\, \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega)\Big\}.$$

Sea

$$A \;=\; \bigcup_{\substack{a<b\\ a,b\in\mathbf{Q}}} A_{a,b}.$$

Para cada $\omega \in \Omega \setminus A$ se cumple que $\lim f_n(\omega)$ existe. Es suficiente probar que $\mathbf{P}(A) = 0$. Para cada $\omega \in A_{a,b}$ se cumple que $U_0(\omega) = \infty$. Para cada $k > 0$ tenemos

$$k\,\mathbf{P}(A_{a,b}) \;\le\; \mathbf{E}\big(U_0 \cdot \chi_A\big) \;\le\; \mathbf{E}\,U_0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\,U_n \;\le\; \frac{M + |a|}{b-a}.$$

La igualdad anterior es consequencia del Teorema de Convergencia Monótona. Por lo tanto $\mathbf{P}(A_{a,b}) = 0$. Por último,

$$\mathbf{P}(A) \;\le\; \sum_{\substack{a<b\\ a,b\in\mathbf{Q}}} \mathbf{P}(A_{a,b}) \;=\; 0$$

ya que cada término de la suma es igual a cero. ∎

§3. Integración Uniforme.

En este apartado se estudia la convergencia de martingalas en la norma $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Será necesaria la noción auxiliar de integración uniforme.

Definición 19. Una sucesión $\{f_n\} \subset \mathrm{L}^1(\Omega)$ se dice uniformemente integrable, si para cada $\epsilon > 0$ existe M tal que

$$\int\limits_{|f_n|>M} |f_n(x)|\,dx \;<\; \epsilon \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbf{N}. \;\square$$

Proposición 20. *Suponga que* $\{f_n\} \subset \mathrm{L}^1(\Omega)$ *converge a* f *en la norma* $\mathrm{L}^1(\Omega)$*, de modo que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \;=\; 0.$$

Entonces $\{f_n\}$ *es uniformemente integrable.*

Demostración. Para cada conjunto medible $A \subset \Omega$ se cumple que

$$\int_A |f_n| \;\leq\; \int_\Omega |f_n - f| + \int_A |f|.$$

Sea $\epsilon > 0$. Sea N tal que

$$\int_\Omega |f_n - f| \;\leq\; \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para cada} \quad n > N.$$

Con $A = \Omega$, vemos que

$$K < \infty \qquad \text{en donde} \qquad K := \sup_n \int_\Omega |f_n|.$$

La Proposición 19 del Capítulo 4 implica que existe $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{P}(A) < \delta$ entonces $\int_A |f| < \epsilon/2$. Sea $M_0 > K/\delta$. Entonces

$$\mathbf{P}\{|f_n| > M\} \;\leq\; \frac{1}{M} \int\limits_{|f_n|>M} |f_n| \;\leq\; \frac{K}{M} \;<\; \delta \quad \text{para cada} \quad M \geq M_0.$$

Para cada $1 \leq n \leq N$ sea M_n tal que $\int\limits_{|f_n|>M_n} |f_n| \;\leq\; \epsilon/2$. En resumen,

$$\text{si} \qquad M = \max_{0\leq j\leq N} M_j \qquad \text{entonces} \qquad \int\limits_{|f_n|>M} |f_n| \;<\; \epsilon$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. ∎

Ejercicio 21. Sea $\{f_j\}$ una sucesión de funciones uniformemente integrable. Pruebe que

$$\sup_j \mathbf{E}|f_j| < \infty.$$

Solución. Ya que $\{f_j\}$ es uniformemente integrable, entonces existe $M > 0$ tal que

$$\int\limits_{|f_j|>M} |f_j(x)|\,dx \leq 1$$

para cada $j \in \mathbf{N}$. Por lo tanto

$$\mathbf{E}|f_j| = \int\limits_{|f_j|>M} |f_j| + \int\limits_{|f_j|\leq M} |f_j| \leq 1 + \int_\Omega M = 1 + M. \blacksquare$$

Teorema 22. *Sea $\{f_j\}$ una submartingala uniformemente integrable. Se cumple entonces que $\{f_j\}$ converge en $\mathrm{L}^1(\Omega)$, esto es, existe una función $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{E}|f_j - f| \to 0$ cuando $j \to \infty$.*

Demostración. El Ejercicio 21 implica que $\{f_j\}$ está acotada en $\mathrm{L}^1(\Omega)$. Por lo tanto es posible aplicar el Teorema 18. Así entonces existe f tal que $f_j \to f$ casi en todas partes. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x) = 0$ para cada $x \in \Omega$.

Sea $\epsilon > 0$. Usando la desigualdad de Chebyshev, ver el Ejercicio 10 del Capítulo 4, tenemos que

$$\mathbf{P}\{|f_j| \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |f_j| = \frac{1}{\epsilon}\left[\int\limits_{|f_j|>M} |f_j| + \int\limits_{|f_j|\leq M} |f_j|\right].$$

Por la hipótesis de integrabilidad uniforme podemos hacer que M sea tal que

$$\mathbf{P}\big\{|f_j| \geq \epsilon\big\} \;\leq\; \epsilon \,+\, \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{|f_j| \leq M} |f_j|.$$

Por el Teorema de Convergencia Acotada, la última integral tiende a cero cuando $j \to \infty$. Por lo tanto,

$$\text{para cada} \quad \epsilon > 0 \quad \text{tenemos que} \quad \lim_{j\to\infty} \mathbf{P}\big\{|f_j| \geq \epsilon\big\} = 0.$$

Nuevamente sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$\mathbf{E}\,|f_j| \;=\; \left[\; \int\limits_{|f_j|>M} \;+\; \int\limits_{M \geq |f_j| > \epsilon} \;+\; \int\limits_{\epsilon \geq |f_j|} \;\right] |f_j(x)|\, dx.$$

Es posible hacer que M sea tan grande que la primera integral sea menor que ϵ y luego mantener fija a M. Puesto que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ entonces la última integral es ciertamente menor o igual que ϵ. La segunda integral es menor o igual que

$$M\,\mathbf{P}\big\{|f_j| > \epsilon\big\} \;\to\; 0$$

cuando $j \to \infty$. Por lo tanto

$$0 \;\leq\; \limsup_{j\to\infty} \mathbf{E}\,|f_j| \;\leq\; 2\epsilon.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{E}\,|f_j| = 0$. ∎

Teorema 23. *Sea* $\big\{f_j\big\}$ *una martingala con respecto a la filtración* $\big\{\mathcal{F}_j\big\}$*. Suponga que* $\big\{f_j\big\}$ *es uniformemente integrable. Entonces existe* $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ *tal que*

$$f_j \;=\; \mathbf{E}\langle f|\mathcal{F}_j\rangle.$$

Demostración. Por el Teorema 22 existe una función $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{E}|f_j - f| \to 0$ cuando $j \to \infty$. Para cada $k > j$ se cumple que $f_j = \mathbf{E}\langle f_k | \mathcal{F}_j \rangle$. Por lo tanto, para cada $A \in \mathcal{F}_j$ tenemos que

$$\int_A f_k = \int_A f_j.$$

Así entonces tenemos que

$$\left| \int_A (f_j - f) \right| = \left| \int_A (f_k - f) \right| \leq \int_A |f_k - f| = \mathbf{E}|f_k - f| \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Por lo tanto $\int_A f_j = \int_A f$ para cada $A \in \mathcal{F}_j$. Esto implica que $f_j = \mathbf{E}\langle f | \mathcal{F}_j \rangle$. ∎

§4. Tiempos de Paro.

Definición 24. Consideremos una filtración $\{\mathcal{F}_j\}$ en Ω. Una función $\tau : \Omega \to \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ se llama tiempo de paro respecto a $\{\mathcal{F}_j\}$ si para cada $j \in \mathbf{N}$ se cumple que $\{\tau = j\} \in \mathcal{F}_j$. □

Ejercicio 25. Pruebe que τ es tiempo de paro si y sólo si $\{\tau \leq j\} \in \mathcal{F}_j$ para cada $j \in \mathbf{N}$.

El propósito del siguiente ejemplo es hechar luz sobre el sentido de la Definición 24. Recuerde el lector que en este capítulo estamos escribiendo Ω en lugar de $[0,1]$.

Ejemplo 26. Es posible representar cada $\omega \in \Omega$ mediante su expansión binaria

$$\omega = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j + 1}{2} \cdot \frac{1}{2^j} \qquad \text{en donde} \qquad \xi_j \in \{-1, +1\}.$$

Si pensamos en ω como un número aleatorio, entonces la sucesión $\{\xi_j\}$ también es aleatoria en cuanto depende de ω. Sea

$$f_n \;=\; f_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j.$$

Suponga que $a < f_0 < b$. Entonces los siguientes son tiempos de paro

$$\tau_1 = \min\{j : f_j \leq a\}, \quad \tau_2 = \min\{j : b \leq f_j\}, \quad \tau_3 = \min\{\tau_1, \tau_2\}. \;\square$$

Ejercicio 27. Sea $\{\xi_j\}$ como en el Ejemplo 24. Pruebe que

$$\mathbf{P}\{\xi_j = -1\} \;=\; \frac{1}{2} \;=\; \mathbf{P}\{\xi_j = +1\}$$

para cada $j \in \mathbf{N}$. Por lo tanto en el Ejemplo 24 se describe un modelo para el lanzamiento de una sucesión infinita de volados.

Suponga que $\{f_j\}$ es una martingala. En la siguiente Proposición 29 se dice cómo construir otras martingalas a partir de $\{f_j\}$.

Definición 28. Sea $\{\mathcal{F}_j\}$ una filtración en Ω. Se dice que la sucesión de funciones $\{\alpha_j\}$ es predecible con respecto de $\{\mathcal{F}_j\}$, si α_j es $\mathcal{F}_{j-1}$ medible para cada $j \in \mathbf{N}$. $\square$

Proposición 29. *Sea $\{\alpha_j\}$ una sucesión predecible de funciones y suponga que existe $K \geq 0$ tal que $|\alpha_j(\omega)| \leq K$ para cada $\omega \in \Omega$ y cada $j \in \mathbf{N}$. Sea $\{f_j\}$ una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_j\}$. Se cumple entonces que*

$$g_n \;=\; \alpha_1 f_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j (f_j - f_{j-1})$$

es una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_n\}$.

Demostración. Ya que $|\alpha_j| \leq K$ entonces $g_n \in \mathrm{L}^1(\Omega)$. Por otro lado,

$$\mathbf{E}\langle g_{n+1}|\mathcal{F}_n\rangle \;=\; \mathbf{E}\langle g_n|\mathcal{F}_n\rangle + \mathbf{E}\langle \alpha_{n+1}(f_{n+1} - f_n)|\mathcal{F}_n\rangle.$$

Por el Ejercicio 8, tenemos que $g_n = \mathbf{E}\langle g_n|\mathcal{F}_n\rangle$. Por lo tanto

$$\mathbf{E}\langle g_{n+1}|\mathcal{F}_n\rangle \;=\; g_n + \alpha_{n+1}\,\mathbf{E}\langle f_{n+1} - f_n|\mathcal{F}_n\rangle.$$

Nótese ahora que $\mathbf{E}\langle f_{n+1}|\mathcal{F}_n\rangle = f_n$. ∎

Ejercicio 30. Sea $\{\alpha_j\}$ una sucesión predecible y suponga que existe $K \geq 0$ tal que $0 \leq \alpha_j(\omega) \leq K$ para cada $\omega \in \Omega$ y cada $j \in \mathbf{N}$. Sea $\{f_j\}$ una submartingala con respecto a $\{\mathcal{F}_j\}$. Sea $\{g_j\}$ como en la Proposición 29. Pruebe que $\{g_j\}$ es submartingala.

Definición 31. Escribimos $a \wedge b$ en lugar de $\min\{a, b\}$. Sea $\{f_j\}$ una sucesión de funciones definidas en Ω. Sea τ un tiempo de paro. La sucesión de funciones $\{f_{\tau\wedge j}\}$ se define mediante

$$\big(f_{\tau\wedge j}\big)(\omega) = f_{\tau(\omega)\wedge j}(\omega) \qquad \text{para cada} \qquad \omega \in \Omega. \;\square$$

Proposición 32. *Sea τ un tiempo de paro. Tienen lugar las siguientes afirmaciones.*

(a) *Si $\{f_j\}$ es martingala, entonces $\{f_{\tau\wedge j}\}$ es martingala.*

(b) *Si $\{f_j\}$ es submartingala, entonces $\{f_{\tau\wedge j}\}$ es submartingala.*

Demostración. Si definimos

$$\alpha_j \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \geq j, \\ 0 & \text{si } \tau < j, \end{cases}$$

entonces tenemos que

$$f_{\tau\wedge j} \;=\; \alpha_1 f_1 + \alpha_2(f_2 - f_1) + \cdots + \alpha_j(f_j - f_{j-1}).$$

Por otro lado es fácil ver que $\{\alpha_j\}$ es predecible y por lo tanto se aplica la Proposición 29. ∎

Los dos resultados siguientes son casos de teoremas conocidos como Teoremas de Paro Opcional.

Teorema 33. *Sea $\{f_j\}$ una martingala y sea τ un tiempo de paro, ambos con respecto de la filtración $\{\mathcal{F}_j\}$. Suponga las tres hipótesis siguientes.*

(a) $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1.$

(b) $\mathbf{E}|f_\tau| < \infty.$

(c) $\int_{\tau>j} f_j \to 0$ *cuando* $j \to \infty.$

Se cumple entonces que $\mathbf{E}(f_\tau) = \mathbf{E}(f_1).$

Demostración. Nótese primero que $f_\tau = f_{\tau\wedge j} + (f_\tau - f_j)\chi_{\{\tau>j\}}$. Por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{E}(f_\tau) \;=\; \mathbf{E}(f_{\tau\wedge j}) \;+ \int\limits_{\tau>j} f_\tau - \int\limits_{\tau>j} f_j. \tag{34}$$

Puesto que que $f_{\tau\wedge j}$ es una martingala, entonces $\mathbf{E}(f_{\tau\wedge j}) = \mathbf{E}(f_1)$. El último término en el lado derecho de (34) tiende a cero debido a la hipótesis **(c)**. Las hipótesis **(a)** y **(b)** implican que

$$\int_\Omega |f_\tau| \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\tau=k} |f_\tau| \;<\; \infty.$$

Se deduce entonces que

$$\left| \int\limits_{\tau>j} f_\tau \right| \leq \int\limits_{\tau>j} |f_\tau| = \sum_{k>j} \int\limits_{\tau=k} |f_\tau| \to 0 \quad \text{cuando} \quad j \to \infty. \quad \blacksquare$$

Teorema 35. *Sea* $\{f_j\}$ *una submartingala y sea* τ *un tiempo de paro, ambos con respecto de la filtración* $\{\mathcal{F}_j\}$. *Sea* $n \in \mathbf{N}$. *Suponga que* $\mathbf{P}\{\tau \leq n\} = 1$. *Se cumple entonces que* $\mathbf{E}\langle f_n | \mathcal{F}_\tau \rangle \geq f_\tau$.

Demostración. Es suficiente demostrar que si $A \in \mathcal{F}_\tau$ entonces

$$\int_A \mathbf{E}\langle f_n | \mathcal{F}_\tau \rangle = \int_A f_n \geq \int_A f_\tau.$$

Para ver que ésto se cumple, nótese que

$$\int_A (f_n - f_\tau) = \int_A \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1})\, \chi_{\{\tau<k\}} = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{A_k} (f_k - f_{k-1})$$

en donde $A_k = A \cap \{\tau \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}$. Ya que $\{f_j\}$ es submartingala entonces $\mathbf{E}\langle f_k | \mathcal{F}_{k-1} \rangle \geq f_{k-1}$. Por lo tanto

$$\int\limits_{A_k} f_k = \int\limits_{A_k} \mathbf{E}\langle f_k | \mathcal{F}_{k-1} \rangle \geq \int\limits_{A_k} f_{k-1}. \quad \blacksquare$$

Se demuestran a continuación dos desigualdades para martingalas. La primera de éstas se conoce como la Desigualdad Maximal de Doob.

Teorema 36. (J.L. Doob). *Sea* $\{f_j\}$ *una submartingala respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_j\}$. *Suponga que* $\{f_j\}$ *es no negativa. Sea* $f_j^* = \max_{j \leq n} f_j$. *Sea* $\lambda > 0$. *Entonces*

$$\lambda \mathbf{P}\{f_n^* \geq \lambda\} \leq \int\limits_{f_n^* \geq \lambda} f_n(x)\, dx.$$

Demostración. Sea $\tau = \min\{j \leq n \,:\, f_j \geq \lambda\}$ en caso de que exista $j \leq n$ tal que $f_j \geq \lambda$. Si éste no es el caso, entonces ponemos $\tau = n$. Se cumple entonces que $\tau \leq n$ casi en todas partes. Puesto que $\{f_j\}$ es una submartingala no negativa, entonces $\mathbf{E}(f_n) \geq \mathbf{E}(f_\tau)$. Ahora bien

$$\mathbf{E}(f_\tau) \;=\; \int\limits_{f_n^* \geq \lambda} f_\tau \;+\; \int\limits_{f_n^* < \lambda} f_\tau .$$

Nótese que $f_n^* \geq \lambda$ implica que $f_\tau \geq \lambda$. También se cumple que $f_n^* < \lambda$ implica que $\tau = n$ y por lo tanto $f_\tau = f_n$. Por lo tanto

$$\mathbf{E}(f_n) \;\geq\; \mathbf{E}(f_\tau) \;\geq\; \lambda\,\mathbf{P}\{f_n^* \geq \lambda\} \;+\; \int\limits_{f_n^* < \lambda} f_n .$$

Así entonces

$$\lambda\,\mathbf{P}\{f_n^* \geq \lambda\} \;\leq\; \mathbf{E}(f_n) \;-\; \int\limits_{f_n^* < \lambda} f_n \;=\; \int\limits_{f_n^* \geq \lambda} f_n . \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema se conoce como la desigualdad en L^2 maximal de Doob. Será necesario un resultado auxiliar.

Ejercicio 37. Sea $f : \Omega \to [0,\infty)$ una función no negativa. Sea $g : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ una función diferenciable y estrictamente creciente tal que $g(0) = 0$ y $g(\infty) = \infty$. Pruebe que

$$\mathbf{E}\,g(f) \;=\; \int\limits_0^\infty g'(x)\,\mathbf{P}\{f > x\}\,dx.$$

Solución. Nótese primero que $\mathbf{P}\{f > x\} = \mathbf{P}\{g(f) > g(x)\}$. Ya que

$$\int\limits_0^\infty g'(x)\,\mathbf{P}\{g(f) > g(x)\}\,dx \;=\; \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{g(f) > x\}\,dx$$

entonces es suficiente considerar el caso $g(x) = x$ para cada $0 \le x < \infty$. Sea $p_j = \mathbf{P}\big\{(j-1)/n < f \le j/n\big\}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\, p_j \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} p_j \sum_{k=1}^{j} 1 \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} p_j \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big\{ f > \frac{k-1}{n} \Big\}.$$

Multiplique por $1/n$ y note que el extremo izquierdo tiende a $\mathbf{E}\, f$ cuando $n \to \infty$. El extremo derecho tiende a $\int_0^\infty \mathbf{P}\big\{f > x\big\}\, dx$. ∎

Teorema 38. (J.L. Doob). *Sea* $\big\{f_j\big\}$ *una submartingala respecto a la filtración* $\big\{\mathcal{F}_j\big\}$*. Suponga además que* $\big\{f_j\big\}$ *es no negativa y tal que* $f_j \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ *para cada* $j \in \mathbf{N}$*. Sea* $f_n^* = \max\limits_{j \le n} f_j$*. Entonces*

$$\mathbf{E}\,|f_n^*|^2 \;\le\; 4\,\mathbf{E}\,|f_n|^2.$$

Demostración. Por la desigualdad Maximal de Doob, tenemos que

$$\mathbf{E}\,|f_n^*|^2 \;=\; 2\int_0^\infty x\, \mathbf{P}\big\{f_n^* > x\big\}\, dx \;\le\; 2\int_0^\infty \int_{f_n^* \ge x} f_n(\omega)\, d\omega\, dx.$$

Intercambiamos el orden de las integrales y aplicamos la desigualdad Cauchy-Schwarz y así obtenemos

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{E}\,|f_n^*|^2 \le \int_\Omega f_n(\omega) \int_0^{f_n^*(\omega)} dx\, d\omega = \int_\Omega f_n\, f_n^* \le \Big\{\mathbf{E}\,|f_n|^2\Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{\mathbf{E}\,|f_n^*|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Esto termina la prueba. ∎

Capítulo 7

TEOREMAS LÍMITE DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

§1. Teorema Central del Límite.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de funciones y sea F una función de distribución de probabilidad (fdp). Entonces F define un operador $\mathbf{F}$ en $\mathcal{X}$ mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathcal{X} &\to \mathcal{X} \\ u &\mapsto v = u * F \end{aligned}$$

en donde $v = \mathbf{E}(u_t)$ y además $u_t(y) = u(t-y)$, es decir,

$$v(t) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-y)\,dF(y).$$

Escribiremos $\mathbf{F}_n$ para denotar la aplicación n veces del operador $\mathbf{F}$. Así por ejemplo, escribiremos

(1) $$\mathbf{F}_n u \qquad \text{en lugar de} \qquad \underbrace{\mathbf{F}\cdots\mathbf{F}}_{n\text{ veces}}u.$$

Nótese que $\mathbf{F}_n$ es el operador correspondiente a la fdp

(2) $$\underbrace{F * F * \cdots * F}_{n\text{ veces}}.$$

Por último, pensaremos en $\mathcal{X}$ como el espacio de las funciones continuas $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ con límites en el infinito, esto es, cada $u \in \mathcal{X}$ es tal que los dos límites $u(+\infty)$ y $u(-\infty)$ existen.

Ejercicio 3. Muestre que $||\mathbf{F}|| = 1$ en donde $||\mathbf{F}||$ es la norma del operador $\mathbf{F}$, esto es,

$$||\mathbf{F}|| \;=\; \inf\Big\{M \;:\; ||\mathbf{F}u|| \;\leq\; M||u|| \quad \text{para cada} \quad u \in \mathcal{X}\Big\}.$$

Definición 4. Sean F y G dos fdp y sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ los operadores correspondientes. Sea $\mathbf{F}_n$ como en (1). Escribiremos $\mathbf{F}_n \to \mathbf{G}$ para denotar que

$$||\mathbf{F}_n u - \mathbf{G}u|| \to 0 \qquad \text{para cada} \qquad u \in \mathcal{X}. \;\; \square$$

Lema 5. *Para los operadores asociados a funciones de distribución de probabilidad (fdp) se cumple que*

$$||\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2 u - \mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 u|| \;\leq\; ||\mathbf{F}_1 u - \mathbf{G}_1 u|| + ||\mathbf{F}_2 u - \mathbf{G}_2 u||.$$

Más generalmente, si $\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 \cdots \mathbf{F}_n$ *y* $\mathbf{B} = \mathbf{G}_1 \cdots \mathbf{G}_n$ *entonces*

$$||\mathbf{A}u - \mathbf{B}u|| \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} ||\mathbf{F}_j u - \mathbf{G}_j u||.$$

Para la fdp normal escribiremos

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx. \tag{6}$$

Lema 7. *Se cumple que* $G_n(x\sqrt{n}\,) = G(x)$.

Demostración. Sea $g_n(x)$ la función de densidad de $G_n(x)$. Entonces la función de densidad de $G_n(x\sqrt{n}\,)$ es igual a

$$\sqrt{n}\, g_n(x\sqrt{n}\,) = g_1(x) \quad \text{en caso de que} \quad g_n(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2n}x^2}}{\sqrt{2\pi n}}. \tag{8}$$

Supongamos ahora que g_n es como en (8). Entonces g_{n+1} está dado por

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{y^2}{2n}-\frac{1}{2}(x-y)^2\Big\}\,dy.$$

Puesto que

$$-\frac{y^2}{2n}-\frac{1}{2}(x-y)^2 \;=\; -\frac{x^2}{2(n+1)}-\left\{y\sqrt{\frac{n+1}{2n}}-x\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\right\}^2$$

entonces $g_{n+1}(x)=\exp\Big\{\dfrac{x^2}{2(n+1)}\Big\}\Big/\sqrt{2\pi(n+1)}$. ∎

Teorema 9. (Central del Límite). *Suponga que la fdp F es tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)\;=\;0 \qquad y \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dF(x)\;=\;1.$$

Sea F_n la fdp en (2). Sea $\widetilde{\mathbf{F}}_n$ el operador correspondiente a la fdp $F_n(x\sqrt{n})$. Se cumple entonces que

$$\widetilde{\mathbf{F}}_n\to\mathbf{G}$$

en donde $\mathbf{G}$ es el operador correspondiente a la fdp normal.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u\in\mathcal{X}$ tiene tres derivadas tales que $||u'''||<\infty$. Entonces

$$||\widetilde{\mathbf{F}}_n u-\mathbf{G}u||\;=\;||\widetilde{\mathbf{F}}_n u-\widetilde{\mathbf{G}}_n u||\;\le\; n||\widetilde{\mathbf{F}}u-\widetilde{\mathbf{G}}u||.$$

Por lo tanto, es suficiente si probamos que

$$n\big(\widetilde{\mathbf{F}}u-u\big)\;\to\;\frac{1}{2}u''. \tag{10}$$

Para probar (10) escribimos $F_n^{\#}(y)$ en lugar de $ny^2F(y\sqrt{n})$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x)}{y^2}\, dF_n^{\#}(y) \;=\; nu(x)\int_{-\infty}^{+\infty} dF(y\sqrt{n}\,) \;=\; nu(x).$$

Puesto que $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x) = 0$ entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x)}{y}\, dF_n^{\#}(y) \;=\; nu'(x)\int_{-\infty}^{+\infty} y\, dF(y\sqrt{n}\,) \;=\; 0.$$

Puesto que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x) = 1$ entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}u''(x)\, dF_n^{\#}(y) \;=\; \frac{n}{2}u''(x)\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, dF(y\sqrt{n}\,) \;=\; \frac{1}{2}u''(x).$$

Por lo tanto $n\big(\widetilde{\mathbf{F}}u - u\big) - \dfrac{1}{2}u''$ es igual a

$$\textbf{(11)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{u(x-y) - u(x) + yu'(x)}{y^2} - \frac{1}{2}u''(x)\right] dF_n^{\#}(y).$$

Para cada $k = 1, 2, 3$ se cumple que

$$u(x-y) \;=\; u(x) - yu'(x) + \frac{1}{2}y^2u''(x) - \cdots + (-1)^k\frac{y^k}{k!}u^{(k)}(\xi)$$

en donde ξ es un número entre $x-y$ y x. Por lo tanto (11) está acotada por (para cualquier $a > 0$ fijo)

$$||u''||\left[\int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{\infty}\right] ny^2\, dF(y\sqrt{n}\,) + ||u'''||\int_{-a}^{+a} |y|^3\, dF(y\sqrt{n}\,).$$

Haciendo el cambio de variable $y \mapsto y/\sqrt{n}$ vemos que (10) está acotada por

$$||u''|| \int\limits_{|y|<a\sqrt{n}} y^2 \, dF(y) \; + \; O\Big(\frac{||u'''||}{\sqrt{n}}\Big).$$

Así entonces $n\big(\widetilde{\mathbf{F}}u - u\big) - \dfrac{1}{2}u'' \to 0$ cuando $n \to \infty$. ∎

§2. Ley de los Grandes Números.

El Teorema 13 es una versión simple de la ley de los grandes números para funciones (variables aleatorias) en $\mathrm{L}^4(\Omega)$.

Proposición 12. *Suponga que para cada $\epsilon > 0$ se cumple que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big\{|f_j| \geq \epsilon\Big\} \; < \; \infty.$$

Entonces $f_j(\omega) \to 0$ cuando $j \to \infty$ para casi toda $\omega \in \Omega$.

Demostración. Sea $A = \big\{\omega : f_j(\omega) \to 0\big\}$. Para cada $k \in \mathbf{N}$ sea

$$A_k \; = \; \big\{\omega \; : \; \forall \;\; n \;\; \exists \;\; j > n \;\; \text{tal que} \;\; |f_j(\omega)| \geq 1/k\big\}.$$

Si $\omega \in \Omega \setminus A$ entonces $\omega \in A_k$ para algún k. Ahora bien

$$\mathbf{P}\big\{A_k\big\} \; = \; \mathbf{P}\Bigg[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \Big\{|f_j| \geq \frac{1}{k}\Big\}\Bigg] \; \leq \; \sum_{j=n}^{\infty} \mathbf{P}\Big\{|f_j| \geq \frac{1}{k}\Big\} \; \to \; 0$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $\mathbf{P}\big\{A_k\big\} = 0$ para cada $k \in \mathbf{N}$. ∎

Teorema 13. *Sean* $f_j : \Omega \to \mathbf{R}$ *tales que* $\mathbf{P}\big\{f_j \le x\big\} = \mathbf{P}\big\{f_1 \le x\big\}$ *para toda* $x \in \mathbf{R}$ *y cada* $j \in \mathbf{N}$. *Suponga que* $\mathbf{E}(f_j) = 0$. *Suponga además que*

$$\mathbf{E}\bigg\{\prod_{k=1}^{4} f_{j_k}\bigg\} \;=\; \mathbf{E}\bigg\{\prod_{k=1}^{3} f_{j_k}\bigg\}\mathbf{E}(f_{j_4}) \quad \textit{siempre que} \quad j_4 \notin \big\{j_1, j_2, j_3\big\}.$$

Entonces, para casi toda $\omega \in \Omega$, *se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S(\omega) \;=\; 0 \qquad \textit{en donde} \qquad S_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\omega).$$

Demostración. Nótese primero que

$$\mathbf{E}|S_n|^4 \;=\; \mathbf{E}\Big[(f_1+\cdots+f_n)(f_1+\cdots+f_n)(f_1+\cdots+f_n)(f_1+\cdots+f_n)\Big].$$

Al desarrollar el producto vemos que $\mathbf{E}|S_n|^4$ es suma de términos de la forma

$$f_j^4, \qquad f_j^3 f_k, \qquad f_j^2 f_k^2, \qquad f_j^2 f_k f_\ell, \qquad f_j f_k f_\ell f_m$$

en donde los índices son todos distintos. Puesto que $\mathbf{E}(f_j) = 0$ entonces

$$\mathbf{E}(f_j^3 f_k) \;=\; \mathbf{E}(f_j^2 f_k f_\ell) \;=\; \mathbf{E}(f_j f_k f_\ell f_m) \;=\; 0.$$

Por lo tanto

$$\mathbf{E}|S_n|^4 = n\mathbf{E}|f_j|^4 + 3n(n-1)\mathbf{E}|f_j|^2\mathbf{E}|f_k|^2 = n\mathbf{E}|f_1|^4 + O\big(n^2\mathbf{E}^2|f_1|^2\big).$$

Puesto que $0 \le \mathbf{E}|f_1|^4 - \mathbf{E}^2|f_1|^2 = \mathbf{E}\big(|f_1|^2 - \mathbf{E}|f_1|^2\big)^2$ entonces

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|^4 \;=\; O\Big(\frac{1}{n^2}\mathbf{E}|f_1|^4\Big).$$

Puesto que $\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{S_n}{n}\Big|^4 \ge \epsilon\Big\} \;\le\; \frac{1}{\epsilon}\mathbf{E}\Big|\frac{S_n}{n}\Big|^4$ entonces vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{S_n}{n}\Big|^4 \ge \epsilon\Big\} \;\ll\; \frac{\mathbf{E}|f_1|^4}{\epsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;<\; \infty.$$

Así entonces se aplica la Proposición 12. ∎