NUMEROS ALGEBRAICOS Y TRASCENDENTES

Eugenio P. Balanzario. Julio, 2003.

Instituto de Matemáticas, UNAM-Morelia.
Apartado Postal 61-3 (Xangari).
58089, Morelia Michoacán, MEXICO.
e-mail address: ebg@matmor.unam.mx.

§1. Introducción.

Este trabajo está dedicado a los números algebraicos y trascendentes. Después de revisar las pruebas de que números como $\sqrt{2}$, π y $\zeta(3)$ son irracionales, vamos a enfocar nuestra atención a demostrar la trascendencia de números como el número e de Euler. Mencionaremos también sin demostración un profundo teorema de K.F. Roth sobre las aproximaciones a números algebraicos mediante números racionales. Aplicaremos el Teorema de Roth al estudio de una clase de ecuaciones diofantinas.

§2. Números Irracionales.

Definición 1. Un número irracional es un número real que no es de la forma a/b para algunos enteros a y $b \neq 0$. $\square$

El siguiente resultado era conocido ya en tiempos de Pitágoras (570-490 A.C.).

Teorema 2. *El número $\sqrt{2}$ es irracional.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces existen dos enteros positivos a, b tales que

$$(\mathbf{3}) \qquad \sqrt{2} = \frac{a}{b}, \qquad \text{o bién,} \qquad 2b^2 = a^2,$$

y además a, b no tienen ningún factor primo en común: $(a,b) = 1$. La ecuación (3) muestra que $2|a^2$ y por lo tanto $2|a$. Escribiendo $a = 2\alpha$ obtenemos que $b^2 = 2\alpha^2$. Pero esta ecuación muestra que $2|b$. Por lo tanto $(a,b) \geq 2$, lo cual contradice que $(a,b) = 1$. $\blacksquare$

Ejercicio 4. Demuestre que toda solución real de la ecuación

$$x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0 \;=\; 0, \qquad \text{con} \qquad c_j \in \mathbf{Z},$$

es un número entero o bien un número irracional.

Ejercicio 5. Pruebe que $\sqrt[m]{n}$ es irracional siempre que n no sea una m-ésima potencia de un entero.

Ejercicio 6. Pruebe que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Sugerencia. Considere el polinomio $x^4 - 10x^2 + 1$.

El hecho de que π es un número irracional fue demostrado por primera vez en 1770 por J.H. Lambert. La demostración que se presenta aquí se debe a I. Niven.

Teorema 7 (Lambert). *El número π es irracional.*

Demostración (Niven). Supongamos lo contrario. Entonces existen enteros positivos a, b tales que $\pi = a/b$. Sea

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\ &=\; \frac{1}{n!}\big(a_0x^n + a_1x^{n+1} + \cdots + a_nx^{2n}\big), \end{aligned}$$

en donde claramente los coeficientes $a_0, a_1 \ldots, a_n$ son números enteros. Definamos también la función

$$F(x) \;=\; f(x) - f''(x) + f^{(iv)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

en donde el entero n queda como un parámetro libre cuyo valor se determinará más adelante. Es claro que

$$f(0) \;=\; f'(0) \;=\; \cdots \;=\; f^{(n-1)}(0) \;=\; 0.$$

Si $n \le k \le 2n$, entonces también se cumple que

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) \;&=\; \frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}(n+\ell)(n+\ell-1)\cdots(n+\ell-k+1)\,a_\ell\,x^{n+\ell-k} \\ &=\; \frac{1}{n!}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(n+\ell)!}{(n+\ell-k)!}\,a_\ell\,x^{n+\ell-k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f^{(k)}(0) \;=\; \frac{1}{n!}\cdot k!\, a_{k-n}.$$

Vemos pues que para $0 \le j \le 2n$ cada uno de los números $f^{(j)}(0)$ son enteros: $f^{(j)}(0) \in \mathbf{Z}$. Puesto que $f(x) = f(\pi - x)$ entonces tanto $F(0)$ como $F(\pi)$ son números enteros.

Por otro lado

$$\frac{d}{dx}\big\{F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x\big\} \;=\; \big\{F''(x) + F(x)\big\}\operatorname{sen} x \;=\; f(x)\operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto

$$\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} x\, dx \;=\; \Big[F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x\Big]_0^\pi \;=\; F(\pi) + F(0)$$

es un número entero. Pero para $0 < x < \pi$

$$0 \;<\; f(x)\operatorname{sen} x \;<\; \frac{\pi^n\, a^n}{n!} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty.$$

Se deduce entonces que la integral anterior es positiva pero menor que $1/2$ siempre que n sea suficientemente grande. Esto contradice que $F(\pi)+F(0)$ sea un entero y por lo tanto π es irracional. ∎

§3. La Irracionalidad $\zeta(3)$.

Para cada $x > 1$, se escribe

$$\zeta(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

En 1734, L. Euler pudo evaluar $\zeta(2n)$, para cada $n \in \mathbf{N}$, en términos de potencias de π. El siguiente resultado aporta información sobre la naturaleza aritmética de $\zeta(3)$.

Teorema 8 (Apery). *El número $\zeta(3)$ es irracional.*

Demostración (Beukers). Sea

$$p_n(x) \;=\; \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\, x^n(1-x)^n.$$

Entonces $p_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes enteros.

Afirmación 10. La integral

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{p_n(x)p_n(y)}{1-xy}\log(xy)\,dx\,dy \tag{11}$$

es una combinación lineal, con coeficientes enteros, de expresiones de la forma

$$\zeta(3)\ -\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{m^3},\qquad \frac{1}{j-k}\sum_{m=1}^{j-k}\frac{1}{(k+m)^2},\qquad \frac{1}{k-j}\sum_{m=1}^{k-j}\frac{1}{(j+m)^2},$$

con $j,k=0,1,\cdots,n$.

En efecto, la integral (11) es una combinación lineal, con coeficientes enteros de expresiones de la forma

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x^j y^k}{1-xy}\log(xy)\,dx\,dy \tag{12}$$

con $j,k=0,1,\cdots,n$. Expresando $1/(1-xy)$ como una serie geométrica, vemos que (12) es igual a

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(j+m+1)^2(k+m+1)}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(j+m+1)(k+m+1)^2}. \tag{13}$$

Si $j=k$, esta suma se simplifica a

$$-2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(j+m+1)^3}=-2\zeta(3)+2\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{m^3}.$$

Si $j>k$, entonces (13) es igual a

$$\frac{1}{k-j}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(k+m+1)^2}-\frac{1}{(j+m+1)^2}\right\}=\frac{1}{k-j}\sum_{m=1}^{j-k}\frac{1}{(k+m)^2}.$$

El caso $j<k$ es similar. Esto prueba la Afirmación 10.

Supongamos ahora que $\zeta(3) = a/b$ con a y b naturales. Sea n un número natural mayor que b. Entonces podemos escribir

$$\textbf{(14)} \qquad \frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{M}_n^3} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{p_n(x)p_n(y)}{1-xy} \log(xy)\, dx\, dy$$

en donde A_n es un entero y M_n es el mínimo común múltiplo de $1, 2, \ldots, n$. Puesto que

$$\frac{\log w}{1-w} = -\int_0^1 \frac{dz}{1-(1-w)z}$$

entonces vemos que la integral en el lado derecho de (14) es igual a

$$\textbf{(15)} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{p_n(x)p_n(y)}{1-(1-xy)z}\, dx\, dy\, dz.$$

Integrando por partes con respecto a x, vemos que (15) es igual a

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n y^n z^n (1-x)^n\, p_n(y)}{\big(1-(1-xy)z\big)^{n+1}}\, dx\, dy\, dz.$$

Con el cambio de variable $z \mapsto (1-z)/(1-wz)$, se cumple que

$$\int_0^1 \frac{z^n\, dz}{(1-wz)^{n+1}} = \int_0^1 \Big(\frac{1-z}{1-w}\Big)^n \frac{dz}{1-wz}.$$

Con $w = 1-xy$, la integral (15) se puede escribir como

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^n (1-z)^n\, p_n(y)}{1-(1-xy)z}\, dx\, dy\, dz.$$

Integrando por partes, ahora con respecto a y, se tiene que (15) es igual a

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \Big\{\frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z}\Big\}^n \frac{dx\, dy\, dz}{1-(1-xy)z}.$$

Esta última integral es positiva y por lo tanto A_n es distinta de cero.

Afirmación 16. Para cada $x, y, z \in (0,1)$ se cumple que

$$\frac{xyz(1-x)(1-y)(1-z)}{1-(1-xy)z} \;\leq\; \left(\sqrt{2}-1\right)^4.$$

Afirmación 17. Para n grande, se cumple la desigualdad $\mathrm{M}_n \leq 3^n$.

Si las Afirmaciones 16 y 17 se cumplen, entonces tenemos que existe una constante K tal que

$$0 \;<\; |\mathrm{A}_n| \;\leq\; \left\{27(\sqrt{2}-1)^4\right\}^n \cdot K \;\leq\; \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot K \;<\; 1$$

cuando n es suficientemente grande. Esto contradice el hecho de que A_n es un entero y por lo tanto $\zeta(3)$ es irracional.

La prueba de la Afirmación 16 se reduce a un ejercicio en el cálculo diferencial de varias variables.

Para probar la Afirmación 17, usaremos el teorema de los números primos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} \;=\; 1$$

en donde $\pi(n)$ es el número de primos que no exceden a n. Entonces, se cumple que

$$\pi(n) \;\leq\; \frac{n\log 3}{\log n}$$

para cada n suficientemente grande. Por lo tanto,

$$\mathrm{M}_n \;\leq\; n^{\pi(n)} \;\leq\; 3^n.$$

Esto termina de demostración. ∎

§4. Números Trascendentes.

Definición 18. Un número complejo que satisface la ecuación

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \;=\; 0, \qquad a_n \in \mathbf{Z}, \tag{19}$$

se llama número algebraico. Un número que no es algebraico se llama trascendente. Por lo tanto un número trascendente no satisface ninguna ecuación de la forma (9). $\square$

En 1874 G. Cantor demostró la existencia de los números trascendentes a partir del hecho de que el conjunto de todos los números algebraicos tiene la misma cardinalidad que la del conjunto de los números naturales, mientras que el conjunto de todos los números reales no es numerable. De lo anterior se ve que casi todo número real es trascendente. Por otro lado, decidir si un número particular es o no trascendente es un problema más difícil.

En 1844 J. Liouville construyó ciertos números trascendentes particulares (ver la sección §5). En 1873 Ch. Hermite pudo demostrar que el número e de Euler es trascendente. Un poco más adelante, en 1882, F. Lindemann demostró la trascendencia de π. Este resultado de Lindemann resolvió el problema de probar que no se puede construir un cuadrado cuya área sea la de un círculo dado. La construción de dicho cuadrado se entiende en el sentido de que sólo se permite usar regla y compás. Este es el famoso problema griego de la cuadratura de círculo.

§4. La Trascendencia de e.

Teorema 20 (Hermite). *El número e es trascendente.*

Demostración (Hilbert). Sea k un entero positivo. Integrando por partes se obtiene que

$$\int_0^\infty x^k\, e^{-x}\, dx \;=\; \Big[-x^k\, e^{-x}\Big]_0^\infty + k\int_0^\infty x^{k-1}\, e^{-x}\, dx \;=\; k\int_0^\infty x^{k-1}\, e^{-x}\, dx,$$

de manera que si $\mathcal{I}_k := \int_0^\infty x^k\, e^{-x}\, dx$ entonces

$$\mathcal{I}_k \;=\; k{\cdot}\mathcal{I}_{k-1} \;=\; k(k-1){\cdot}\mathcal{I}_{k-2} \;=\; \cdots \;=\; k!{\cdot}\mathcal{I}_0 \;=\; k!$$

Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y con término constante $p(0)$. Entonces, para $m \geq 0$

$$\textbf{(21)} \qquad \int_0^\infty x^m p(x)\, e^{-x}\, dx \;\equiv\; p(0)\, m!, \qquad \bmod\ (m+1)!$$

Por lo tanto la integral en (21) no es igual a cero si $(m+1)$ no divide a $p(0)$. Supongamos ahora que e es algebraico. Entonces existen números enteros $a_0, \ldots, a_n$ con $a_0 \neq 0$, tales que

$$a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n \;=\; 0. \tag{22}$$

Sea r un número entero positivo. Sea

$$\mathcal{I}_b^c \;=\; \int_b^c x^r \Big\{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Big\}^{r+1} e^{-x}\,dx$$

con $0 \leq b \leq c \leq \infty$. Multiplicando (22) por $\mathcal{I}_0^\infty$, obtenemos

$$\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 \;=\; 0,$$

en donde

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{P}_1 & = & a_0\,\mathcal{I}_0^\infty + a_1 e\,\mathcal{I}_1^\infty + \cdots + a_n e^n\,\mathcal{I}_n^\infty \\[2ex] \mathrm{P}_2 & = & \qquad\quad\; + a_1 e\,\mathcal{I}_0^1 \;\; + \cdots + a_n e^n\,\mathcal{I}_0^n \end{array}\right. \tag{23}$$

Obtendremos una contradicción al mostrar que $\mathrm{P}_1/r!$ es un entero distinto de cero mientras que $|\mathrm{P}_2|/r! < 1$ cuando r es suficientemente grande.

Haciendo el cambio de variables $y = x - k$ obtenemos

$$\begin{aligned} a_k\, e^k\, \mathcal{I}_k^\infty \;&=\; a_k \int_k^\infty x^r \Big\{(x-1)\cdots(x-n)\Big\}^{r+1} e^{-(x-k)}\,dx \\ &=\; a_k \int_0^\infty \big(y+k\big)^r \Big\{(y+k-1)\cdots(y+k-n)\Big\}^{r+1} e^{-y}\,dy \\ &=\; \left\{\begin{array}{ll} a_0 \int_0^\infty y^r p_0(y) e^{-y}\,dy & \text{si } k=0 \\[2ex] a_k \int_0^\infty y^{r+1} p_k(y) e^{-y}\,dy & \text{si } 0 < k \leq n, \end{array}\right. \end{aligned}$$

en donde $p_0(y), \cdots, p_n(y)$ son ciertos polinomios con coeficientes enteros. Por lo tanto, todos los términos que contribuyen a P_1 en (23) son números enteros y todos estos términos menos el primero son multiplos de $(r+1)!$. Por lo tanto

$$\mathrm{P}_1 \;\equiv\; a_0\, p_0(0)\, r! \;\equiv\; a_0\, (-1)^{n(r+1)}\, (n!)^{r+1}\, r! \qquad \operatorname{mod}(r+1)!$$

Por lo tanto

$$\mathrm{P}_1 \;=\; a_0\,(-1)^{n(r+1)}\,(n!)^{r+1}\,r! + q\cdot(r+1)! \qquad (\text{con} \quad q \in \mathbf{Z})$$

es un múltiplo de $r!$ Además $\mathrm{P}_1 = 0$ implica que

$$a_0\,(-1)^{n(r+1)}\,(n!)^{r+1} + q\cdot(r+1) \;=\; 0.$$

Pero esto es imposible siempre que $(r+1)$ contenga un factor primo que no divida a $a_0 n!$ Por lo tanto, si r es suficientemente grande, entonces $\mathrm{P}_1 \neq 0$.

Para obtener una cota superior de $|\mathrm{P}_2|$, sean

$$M \;=\; \max_{0\le x\le n} |x(x-1)\cdots(x-n)|, \qquad \text{y} \qquad N \;=\; \max_{0\le x\le n} |(x-1)\cdots(x-n)e^{-x}|.$$

Entonces para $1 \le k \le n$

$$|a_k \mathcal{I}_0^k| \;\le\; |a_k| \int_0^k M^r N\,dx \;=\; k|a_k|M^r N.$$

Por lo tanto

$$|\mathrm{P}_2| \;\le\; \Big\{|a_1|e + 2|a_2|e^2 + \cdots + n|a_n|e^n\Big\} M^r N.$$

Puesto que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M^r}{r!} \;=\; 0 \qquad\qquad (M \text{ es constante})$$

entonces

$$|\mathrm{P}_2| \;<\; r!$$

si r es suficientemente grande. Esto termina la demostración. ∎

§5. Números de Liouville.

En esta sección vamos a mostrar que ciertos números son trascendentes. La existencia de estos números trascendentes especiales es consecuencia de un teorema de Liouville sobre el grado en que un número real algebraico de deja aproximar mediante números racionales.

Definición 24. Se dice que un número ξ es algebraico de grado n si ξ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros y de grado n, pero no es raíz de ningún polinomio de grado menor que n con coeficientes enteros. □

Teorema 25 (Liouville). *Si ξ es un número real algebraico de grado n entonces para cada $\delta > 0$ y $A > 0$ la desigualdad*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{A}{q^{n+\delta}} \tag{26}$$

sólo tiene un número finito de soluciones en números enteros p, q.

Demostración. Supongamos que ξ satisface la ecuación

$$f(\xi) = a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad \text{con} \quad a_j \in \mathbf{Z}.$$

Existe una constante $M > 0$ tal que $|f'(y)| < M$ siempre que $|y - \xi| \leq 1$. Sea p/q un número racional tal que $q > 0$. Supongamos que $|p/q - \xi| \leq 1$ y que $f(p/q) \neq 0$. Entonces

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}$$

ya que todos los coeficientes $a_j \in \mathbf{Z}$. Por el teorema del valor intermedio del cálculo diferencial existe un número η entre p/q y ξ tal que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi) = \left(\frac{p}{q} - \xi\right) f'(\eta).$$

Por lo tanto

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| = \left|\frac{f(p/q)}{f'(\eta)}\right| > \frac{1}{Mq^n}.$$

Si $\delta > 0$ y $A > 0$ son constantes, entonces

$$\frac{A}{q^\delta} < \frac{1}{M}$$

siempre que q sea suficientemente grande y por lo tanto la ecuación (26) sólo tiene un número finito de soluciones en p y q. ∎

Teorema 27 (Liouville). *El siguiente número ξ es trascendente*

$$\xi = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots.$$

Demostración. Escribamos

$$\frac{p}{q} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{10^{j!}}, \qquad \text{y} \qquad q = 10^{k!}.$$

Entonces tenemos que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^{j!}}$$

$$= \frac{1}{10^{(k+1)!}} + \left(\frac{1}{10^{(k+1)!}}\right)^{k+2} + \left(\frac{1}{10^{(k+1)!}}\right)^{(k+2)(k+3)} + \cdots$$

$$\leq \frac{1}{10^{(k+1)!}} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) < \frac{2}{10^{(k+1)!}}.$$

Por lo tanto

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{2}{q^{k+1}}.$$

Puesto que esto ocurre para todo $k = 1, 2, \ldots,$ entonces ξ no puede ser algebraico. ∎

§6. Teorema de Roth y Aplicaciones.

El teorema de Liouville se puede mejorar de manera substancial. En efecto, denotemos mediante $\lambda = \lambda(n)$ el menor número positivo para el cual se cumple la siguiente propiedad: dado cualquier número real algebraico ξ de grado $n \geq 2$ y dado cualquier $v > \lambda$, la desigualdad

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^v}$$

sólo tiene un número finito de soluciones en enteros p, q.

Por el Teorema de Liouville, sabemos que $\lambda \leq n$. Posteriormente A. Thue, C.L. Siegel y F.J. Dyson probaron respectivamente que

$$\lambda \leq \frac{n}{2} + 1, \qquad \lambda \leq \min_{0<\ell<n} \left(\ell + \frac{n}{\ell + 1}\right) \qquad \text{y} \qquad \lambda \leq \sqrt{2n}.$$

Finalmente en 1955, Roth probó que $\lambda \leq 2$, siendo ésta una estimación ópitma ya que si ξ es un número irracional cualquiera entonces existe una infinidad de enteros p y q tales que $|\xi - p/q| < 1/q^2$.

Teorema 28 (Roth). *Sea ξ un número irracional algebraico. Sea $\delta > 0$. Entonces la desigualdad*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\delta}}$$

tiene sólo un número finito de soluciones en números enteros p, q.

Una ecuación se llama diofantina cuando las soluciones se restringen a los números enteros. El siguiente teorema es una aplicación del Teorema de Roth a ciertas ecuaciones diofantinas.

Teorema 29. *Sea $n \geq 3$. Sea*

$$f(x,y) \;=\; b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n$$

un polinomio homogeneo irreducible con coeficientes enteros. Sea

$$g(x,y) \;=\; \sum_{r+t\leq n-3} g_{rt}\, x^r y^t$$

un polinomio de grado no mayor que $n-3$ y con coeficientes racionales. Entonces la ecuación

$$f(x,y) \;=\; g(x,y) \tag{30}$$

sólo tiene un número finito de soluciones en enteros x, y.

Demostración. Supondremos sin pérdida de generalidad que $|x| \leq |y|$ y también que $y > 0$. Sean $a_1, \ldots, a_n$ las raices de la ecuación $f(x,1) = 0$ y sea $M = \max\big\{|g_{rs}|\big\}$. Puesto que $|x| \leq |y|$ entonces

$$|x^r y^s| \;\leq\; y^{r+s}.$$

Además la ecuación $y^{r+s} = y^j$ tiene a lo más $(j+1)$ soluciones. De la ecuación (30) se obtiene que

$$\begin{aligned} |b_0(x-a_1y)\cdots(x-a_ny)| \;&\leq\; M(1+2y+\cdots+(n-2)y^{n-3}) \\ &\leq\; Mn^2y^{n-3}. \end{aligned} \tag{31}$$

Por lo tanto, existe ν tal que

$$|x-a_\nu y| \;<\; c_1y^{1-\frac{3}{n}}$$

en donde $c_1, c_2, \ldots$ denotan constantes positivas. Si $\mu \neq \nu$ y y es mayor que una constante c_2, suficientemente grande, entonces

$$\begin{aligned} |x-a_\mu y| \;=\; |(a_\nu - a_\mu)y + (x-a_\nu y)| \;&\geq\; |a_\nu - a_\mu|y - |x-a_\nu y| \\ &\geq\; c_3y - c_1y^{1-\frac{3}{n}} \;\geq\; c_4y. \end{aligned} \tag{32}$$

Por (31) y (32) vemos que $|x - a_\nu y| < \dfrac{c_5}{y^2}$ o bien

$$|a_\nu - \frac{x}{y}| \; < \; \frac{c_5}{y^3}.$$

Por el Teorema de Roth, esta desigualdad sólo tiene un número finito de soluciones. El caso $y \leq c_2$ es claro. El teorema esta probado. ∎

El siguiente es un caso particular del Teorema 29.

Teorema 33 (Thue). *Sea $n \geq 3$. Sea*

$$f(x,y) \; = \; b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n$$

un polinomio homogeneo irreducible con coeficientes enteros. Sea m un entero: $m \in \mathbf{Z}$. Entonces la ecuación

$$f(x,y) \; = \; m$$

sólo tiene un número finito de soluciones en números enteros x, y.

§7. El Problema Siete de Hilbert.

En el año 1900, D. Hilbert elaboró una lista de 23 problemas que él creia seríán de importancia para la matemática del siglo XX. El problema número siete dice así:

La expresión α^β para una base α algebraica y un exponente β irracional algebraico, e.g., los números $2^{\sqrt{2}}$ ó $e^\pi = i^{-2i}$, siempre representan números trascendentes o al menos números irracionales.

En 1929, el matemático ruso A.O. Gelfond probó la trascendencia de e^π y observó que su método de prueba podía usarse para resolver el problema de Hilbert cuando β yace en un campo cuadrático imaginario. En 1930, R.O. Kusmin usó el método de Gelfond para resolver el problema cuando β yace en un campo cuadrático real y en particular probó que $2^{\sqrt{2}}$ es trascendente. En 1934, Gelfond y T. Schneider, independientemente uno del otro, dieron la solución completa al problema siete de Hilbert.

En la actualidad, todavía se desconoce si son o no trascendentes números como $e + \pi$, $e\pi$, $\zeta(2n+1)$, (en donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann y $n \in \mathbf{N}$) y la constante de Euler

$$\gamma \; = \; \lim_{n\to\infty} \bigl(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\bigr).$$

En una de sus clases, estando Siegel presente como alumno (1919), Hilbert dio su opinión sobre el grado de dificultad de tres problemas de la teoría de números. Sobre la hipótesis de Riemann, Hilbert dijo que probablemente él viviría para ver la solución, esto en vista de los recientes progresos en la materia. Sobre el último teorema de Fermat, Hilbert dijo que algunos de sus alumnos más jovenes, vivirían lo suficiente como para ver resuelto el problema. Sin embargo, con respecto al problema número siete, Hilbert pensó que ninguno de sus alumnos ahi presentes viviría para ver resuelto el problema.

§8. Ejercicios.

Ejercicio 34. Demostrar que el conjunto de todos los números real algebraicos es numerable.

Ejercicio 35. Sea $a \geq 1$ un entero. Entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n!}}$ es trascendente.

Ejercicio 36. Sea $a \geq 1$ un entero. Entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{3^n}}$ es trascendente.

Ejercicio 37. Sea $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} f(n+1)/f(n) > 2$. Sea $a \geq 1$ un entero. Demuestre que el siguiente número es trascendente

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{f(n)}}.$$

Ejercicio 38. Usar la identidad $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$ para probar que un número irracional elevado a una potencia irracional puede se racional.

Ejercicio 39. Usar la identidad $\sqrt{2}^{(\sqrt{2}+1)} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}$ para probar que un número irracional elevado a una potencia irracional puede se irracional.

BIBLIOGRAFIA

Para la redacción de estas notas hemos usado algunas de las fuentes que se listan a continuación. La demostración del Teorema de Roth, la puede encontrar el lector en LeVeque 1956.

Baker, A. 1990. *Transcendental number theory.* Cambridge, 1990.

Beukers, F. 1979. *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$*.* Bull. London. Math. Soc. 11 (1979) 268-272.

Hua, L.K. 1982. *Introduction to number theory.* Springer, 1982.

Jones, J.P. & Toporowski, S. 1973. *Irrational numbers.* Amer. Math. Month. 80 (1973) 423-424.

LeVeque, W.J. 1956. *Topics in number theory.* Vol. II. Addison Wesley, 1956.

Rose, H.E. 1994. *A course in number theory.* Second Edition. Oxford, 1994.