Cuarto examen parcial de Matemáticas IV (22 de noviembre de 2017)

Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta.

1. El método de series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es adecuado (siempre que se cumplan las condiciones necesarias) para encontrar soluciones aproximadas (usando solo algunos términos de la serie y despreciando los demás).
2. El método de series de potencias para resolver una ecuación diferencial construye una solución como una suma de infinitos términos que determina una función. El método puede usarse en todos los casos y el dominio de la función solución es siempre un intervalo no vacío.
3. La serie de potencias de la función exponencial es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n!} x^n$.
4. La serie de potencias de la función coseno es $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$.
5. La solución dada por el método de series de potencias es una serie que determina una función (en su intervalo de convergencia). Si se necesitan dos o más funciones para obtener la solución general hay que obtener las otras funciones usando otros métodos.
6. En un problema que pida resolver una ecuación diferencial para una función dependiente del tiempo y de una coordenada espacial, y en el además se pide que la solución satisfaga condiciones en la frontera del dominio espacial, no pueden además requerirse condiciones iniciales.

Contesta por lo menos 4 de las siguientes 5 preguntas.

1. Encuentra la solución general de la ecuación de Airy
$$y'' - xy = 0.$$
2. Determina dos soluciones independientes de la ecuación
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$
para $n = 0, 1, 2, ...$
3. Usa el método de series de potencias para resolver la ecuación de onda en una dimensión
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$
en el intervalo $0 \leq x \leq L$ sujeta a condiciones de frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$ para toda $t \in (0, L)$.
4. Encuentra todos los valores y funciones características del problema con valores a la frontera
$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad y'(0) = y'(L) = 0.$$
5. Resuelve la ecuación diferencial
$$y'' + \lambda^2 y = \exp(x)$$
con $\lambda^2 > 0$ y sujetos a las condiciones de frontera $y(0) = 0, y(1) = 1$.