Segundo examen parcial de Matemáticas IV (27 de septiembre de 2018)

Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta. Calif. 8 de 10.

1. El subconjunto de $\mathbb{R}^5$ que cumple con $x_1^2 = 0$ es un subsespacio vectorial de dimensión 4 que puede identificarse con el espacio de matrices reales de 2 por 2 por medio de una transformación lineal.
2. El espacio de matrices reales de 2 por 2 es un espacio vectorial y la operación que asigna a una matriz su matriz inversa está definida en un subconjunto de ese espacio, el dominio de esta transformación. Esa transformación es una transformación lineal.

- Considera una transformación lineal $f : U \to V$ donde U y V son finito dimensionales.

3. La dimensión de $f(U)$ es igual a la dimensión de U.

- Considera una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

4. El subconjunto $U' \subset \mathbb{R}^2$ tal que $f(x) = 1$ para todo x en U' es un espacio vectorial.
5. Dada una transformación lineal $f : U \to U$ la transformación que aplica primero f y luego la aplica de nuevo $f^2 = f \circ f : U \to U$ es también una transformación lineal.

- Considera una base de las matrices de 2 por 2 de forma que la función determinante induzca una transformación $\det : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ y la función traza induzca una transformación $\mathrm{Tr} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

6. La transformación det es lineal.
7. La transformación Tr es lineal.
8. El conjunto C_1 de matrices reales de 3 por 3 mostrado abajo es una base de un subespacio vectorial.
9. El conjunto C_2 de matrices reales de 3 por 3 mostrado abajo es una base de un subespacio vectorial

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonalizable.

Contesta por lo menos 3 de las siguientes 5 preguntas.

1. Considera una transformación lineal $f : U \to V$ donde U y V son finito dimensionales.
   Demuestra que el subconjunto de $U' \subset U$ tal que $f(x) = 0$ para todo x en U' es un espacio vectorial.
2. Llamemos M_{2x2} al espacio de las matrices de 2 por 2. Considera la matriz de 2 por 2 $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la transformación lineal $L_M : M_{2x2} \to M_{2x2}$ que a cualquier matriz A le asigna la matriz $L_M(A) = MA$.
   2.1) Verifica que dadas $A, B \in M_{2x2}$ la operación $A \cdot B = \mathrm{Tr}(\tilde{A}B) \in \mathbb{R}$ define un producto interior.
   2.2) Verifica que las siguientes dos matrices son ortogonales según ese producto interior:
   $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y completa el conjunto a una base ortogonal para M_{2x2}.
   3.3) Escribe la matriz asociada a L_M con respecto a la base que diste.

3. Considera el espacio P_1 de polinomios reales de grado menor o igual a 1 y la operación $T : P_1 \to P_1$ que le asigna a $p \in P_1$ el nuevo polinomio $Tp = p + p'$.
   3.1) Sugiere una base para P_1 y escribe la matriz asociada a T respecto a esa base.
   3.2) Escribe la ecuación característica para determinar los valores propios de T.
   3.3) Determina los valores propios de T.
   3.4) Encuentra vectores propios asociados a cada valor propio.
   3.5) Si hubieras usado otra base para P_1, ¿hubieras encontrado valores y vectores propios distintos?

4. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.
   4.1) Determina si existe un cambio de base que lleve a A a una matriz diagonal $B = PAP^{-1}$.
   4.2) ¿Cuáles serían los valores propios de B?
   4.3) Calcula A^7, o por lo menos determina sus valores y vectores propios.

5. Escribe la lista de comandos que le darías a Mathematica para encontrar los valores propios y los vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 0 \\ 11 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -11 \end{pmatrix}$$