

Recuérdese $TC = \mathbb{Z}$ & $TC^S = \mathbb{Z}$ para $\mathbb{R}P^m$

¿Parte de un fenómeno especial?

- $TC(S^m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m \text{ impar} \\ 0 & m \text{ par} \end{cases} ; TC^S(S^m) = \mathbb{Z}$
(pero S^m es muy conectiva)
- $TC(\text{variedad cerrada simpléctica 1-conexa}) = \mathbb{Z}$

⇒ Considerar sólo variedades con $\pi_1 = 0$
relacionadas
con $\mathbb{R}P^m, \dots$

cíclicos
elementales
 $\mathbb{Z}/2$

Ejemplo 1: Espacios lente $L^{2n+1}(2^e)$

Las técnicas en la sección 2 llevan a:

Teorema (Astey-Davis-G, 2003)

$i := \text{menor} : \exists S^{2n+1} \times S^{2n+1} \rightarrow S^i$ $\left\langle \begin{array}{l} \frac{3}{2} - \text{bi-equiv.} \\ \frac{3}{2}^e - \text{balanceada} \end{array} \right.$

Then $\text{In}(L^{2n+1}(2^e)) = i$

$$\text{TC} + 1 \geq \text{In}$$

Teorema (G, 2005)

$t := \text{menor} : \exists S^{2n+1} \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2t+1}$ $\frac{3}{2}^e - \text{bi-eg.}$

Then $\text{Tc}(L^{2n+1}(2^e)) = 2t + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Corolario

$$\text{TC}(\mathcal{L}^{2n+1}(\mathbb{Z}^e)) + 1 \geq \text{In}(\mathcal{L}^{2n+1}(\mathbb{Z}^e))$$

- Óptima en general

- Estricta?

Existencia de $S^{2n+1} \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ que sean $\mathbb{Z}/2$ -equivariantes y $\mathbb{Z}/2^e$ -balanceadas, pero que no sean $\mathbb{Z}/2^e$ -equivariantes.

- Mismo concepto para $e=1$ (compatible con FTY)
 $\Pi_1 = \mathbb{Z}/2^e$

Ejemplo 2: Variedades de Banderas (reales)

$$F(n_1, \dots, n_r) = \left\{ (A_1, \dots, A_r) \left| \begin{array}{l} A_i \leq \mathbb{R}^{n = n_1 + \dots + n_r} \\ \dim A_i = n_i \\ A_i \perp A_j \text{ si } i \neq j \end{array} \right. \right\}$$

- $F(n_1, \dots, n_r) = O(n) / O(n_1) \times \dots \times O(n_r)$
- $\dim F(n_1, \dots, n_r) = \sum n_i n_j \quad (\text{sobre } i < j)$
- $F(1, m) = \mathbb{P}^m$
- Además de $\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^3$ y $\mathbb{P}^7$, $F(1, \dots, 1)$ son las únicas variedades de banderas paralelizables. De hecho:

variedades completas

Teorema (Lam 1975, Stong 1983, Mendes-Conde 2001)

$$\ln(F(n_1, \dots, n_r)) \leq \dim F(n_1, \dots, n_r) + \max\left(1, \frac{1}{2} \sum n_i(n_i - 1)\right)$$

↳ igualdad cuando $\{n_1, \dots, n_r\}$ puede ser adecuadamente particionado

- haz normal $(F(n_1, \dots, n_r)) = \wedge^2 \xi_1 \oplus \dots \oplus \wedge^2 \xi_r$
 $\xi_1, \dots, \xi_r$ = haces tautológicos

- $\wedge^2 \xi_1 \oplus \dots \oplus \wedge^2 \xi_r$ tiene $\omega_{\max} \neq 0$
en diversas condiciones combinatorias explícitas

OBJETIVO: Cotas inferiores tipo zcl para $TC(F(n_i, n_r))$

En progreso:

$TC(I^k, m) =$ ejes k -dimensionales en $\mathbb{R}^{m+k}$

↳ generalización de $P^m = F(1, m)$
que tiene $\Pi_1 = (\mathbb{Z}/2)^k$ pues

$$F(I^k, m) = V_{k, m+k} / (\mathbb{Z}/2)^k$$

$= k$ -proyektivización de $V_{k, m+k}$

Teorema (G-Gutiérrez-Torres, 2012)

$$\bullet \text{TC}(\text{RF}(1,1,m)) \geq \begin{cases} 4m+1, & m = 2^e - 1 \\ 4 \cdot 2^e - 2, & 2^e \leq m \leq 2^{e+1} - 2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{TC}(\text{RF}(1,1,1,m)) \geq \begin{cases} 5m+6, & m = 2^e - 2 \\ 6m+2, & m = 2^e - 1 \\ 6 \cdot 2^e - 3, & 2^e \leq m \leq 2^{e+1} - 3, e \geq 2 \end{cases}$$

— Métodos generalizables ... en progreso

— Patrones interesantes

— a $\{2\}$ de ser óptimo

Ejemplos : $TC(RF(1,1,1)) \geq 5 > 4 = Imm(RF(1,1,1))$

$$TC(RF(1,1,1,1)) \geq 8 > 7 = Imm(RF(1,1,1,1))$$

$$TC(RF(1,1,2)) \geq 6 = Imm(RF(1,1,2))$$

$$TC(RF(1,1,3)) \geq 13 > 10 = Imm(RF(1,1,3))$$

$$TC(RF(1,1,1,2)) \geq 16 > 10 = Imm(RF(1,1,1,2))$$

$$TC(RF(1,1,1,3)) \geq 20 > 15 = Imm(RF(1,1,1,3))$$

$$TC(RF(1,1,1,4)) \geq 21 = Imm(RF(1,1,1,4))$$

compatible con :

$$TC(L^{2n+1}(Z^e)) + 1 \geq Imm(L^{2n+1}(Z^e))$$

Cotas zcl para $TC(F(1^k, m))$:

Control efectivo del anillo $H^*(F(1^k, m); \mathbb{Z}/2)$

— $\delta_1, \dots, \delta_r$ haces tautológicos sobre $F(n_1, n_r)$

— $\bigoplus \delta_i = n \Rightarrow \prod W(\delta_i) = 1$

Teorema (Borel, 1955)

$$H^*(F(n_1, n_r); \mathbb{Z}/2) = \frac{\mathbb{Z}/2 [w_j(\delta_i) \mid 1 \leq j \leq n_i]}{\prod W(\delta_i) = 1}$$

- Muchos generadores son irrelevantes:

Por ejemplo: $w_1(y_1) + \dots + w_r(y_r) = 0$

Teorema (G-Gutierrez-Torres, 2012)

Presentación minimal

$$H^*(F(1^k, m); \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[x_{1,j}, x_k] / \text{Relaciones:}$$

polinomios
simétricos
"completos"

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet h_{m+1}(x_{1,j}, x_k) = 0 \\ \bullet h_{m+2}(x_{1,j}, x_{k-1}) = 0 \\ \dots \\ \bullet h_{m+k}(x_1) = 0 \end{array} \right.$$

Seguramente conocido por los expertos; uso parece ser nuevo!

Corolario base para $H^*(F(I^k, m); \mathbb{Z}/2)$:

$$x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} i_k \leq m \\ i_{k-1} \leq m+1 \\ \vdots \\ i_1 \leq m+k-1 \end{array} \right\} \quad \Sigma = mk + \frac{k(k-1)}{2}$$

generadores: OK.

indep. lineal: conteo....

Ejemplo:

$$\text{cat}(F(I^k, m)) \geq mk + \frac{k(k-1)}{2} = \dim(F(I^k, m))$$

Corolario

(Korbas-Löric, 2003)

usaron métodos
indirectos

$$\text{cat}(F(I^k, m)) = \dim(F(I^k, m))$$

- Las cotas tipo zcl para $TC(F(I^k, m))$ se basan en zcl respecto a los $X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i \in H^*(F(I^k, m); \mathbb{Z}/2)$

- Parte complicada: identificar productos largos $\neq 0$
Fundamento para lo anterior: identificar base

- generadores fácilmente identificables

- Independencia lineal: conteo

$SSS(F(I^{k-1}, m) \longrightarrow F(I^k, m) \longrightarrow P^{m+k-1})$ trivial

$$P_{F(I^k, m)}(x) = P_{P^{m+k-1}}(x) \cdot P_{F(I^{k-1}, m)}(x)$$

... conclusion : $TC+1 \geq In$ para .

— Lentes de torsión 2^e --- $\pi_1 = \mathbb{Z}/2^e$

— $F(1^k, m)$ --- $\pi_1 = (\mathbb{Z}/2)^k$...

Ejemplo 3 : Projectivización de productos de esferas

$$P_{(n_1, \dots, n_r)} = S^{n_1} \times \dots \times S^{n_r} / \mathbb{Z}_2 \text{-diagonalmente}$$

- $\dim = n_1 + \dots + n_r$
- $\pi_1 = \mathbb{Z}_2$

Teorema (G-Grant-Tones-Xicotencatl, 2012)

$$\tau_c(P_{\bar{n}}) < (\tau_c(P^{n_1}) + 1)(r + e)$$

- $\bar{n} = (n_1, \dots, n_r)$ con $n_1 \leq n_i \quad \forall i \geq 2$
- $e = \# \{ i \mid i \geq 2, n_i \text{ par} \}$

Hay familias infinitas de casos con

$$TC(P_n) \ll \dim(P_n) < In(P_n)$$

Conjetura: $TC(P_n)$ depende esencialmente de

- $TC(p^{n_1}) \quad n_1 \leq n_i \quad \forall i$
- r
- e

Ejemplo: $TC(P_n) = TC(p^{n_1}) + r - 1$ cuando

- $n_1 \leq n_i, i \geq 2$
- $n_1 = 2^e$
- $v(n_{i+1}) \geq \phi(n_1), i \geq 2$

Demostración del teorema.

$$S^{n_2} \times \dots \times S^{n_r} \rightarrow P_{\vec{n}} = S^{n_1} \times_{\mathbb{Z}/2} (S^{n_2} \times \dots \times S^{n_r}) \rightarrow \mathbb{P}^{n_1}$$

- cat es submultiplicativa : $\text{cat}(P_{\vec{n}}) < (n_1 + 1)r$
- No se sabe si TC lo es,

objetivo : lo es en la fibration anterior

Teorema (Golman - Grant, 2012, arXiv 1205.0166)

- G grupo de Lie compacto
- $p : E \rightarrow B$ fibration G -principal
- $F \subset E$ G -espacio

$$\Rightarrow \text{TC}(E \times_B F) < (\text{TC}(B) + 1)(\text{TC}_G(F) + 1)$$

Def para un G -espacio X

$$TC_G(F) = \text{secat}_G(X \overset{G,1}{\rceil} \longrightarrow X \times X)$$

con G -acción: $\uparrow$ composición $\uparrow$ diagonal

Interpretación: Planificación matriz compatible con simetrías del espacio de estados

- Propiedades:
- invariante G -homotópico
 - $TC_G(X) = 0$ ssi X es G -contráctil
 - subaditivo en productos
 - $\text{cat}_G(X) \leq TC_G(X) \leq \text{cat}_G(X \times X)$
 $\hookrightarrow$ igualdad si X es gpo con G -acción por morfismos
 - $TC \leq TC_G \neq \text{zcl}_G \leq TC_G$

Conclusión de la demostración:

Resta ver que $TC(S^m) \cong TC_{\mathbb{Z}/2}(S^m)$ ↖ antipodal

m impar: $X(p^m) = 0 \Rightarrow p^m$ admite un campo $tg.$
que al inducirse bajo $S^m \rightarrow p^m$ produce
 $\chi =$ campo tangente en S^m $\mathbb{Z}/2$ -equivariante.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_0 \subseteq S^m \times S^m, \quad U_0 = \{ (a, b) : a \neq -b \} \\ U_1 \subseteq S^m \times S^m, \quad U_1 = \{ (a, b) : a \neq b \} \\ \text{con los planes locales usuales} \end{array} \right\}$$

es un SPML equivariante.

Conclusión de la demostración:

Resta ver que $TC(S^m) \geq TC_{\mathbb{Z}/2}(S^m)$ ← antipodal

m · par!

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega X & \equiv & \Omega X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X^{[0,1]} & \longrightarrow & X^{[0,1]} / \mathbb{Z}/2 \\
 \downarrow \epsilon & \nearrow & \downarrow \epsilon \\
 X \times X & \longrightarrow & X \times X / \mathbb{Z}/2\text{-diagonal}
 \end{array}$$

← $\dim = 2m$
↑
 $X = S^m$

← $\dim = m-2$

$$\Rightarrow \text{secat}(\epsilon) \leq 2$$

$$\Rightarrow TC_{\mathbb{Z}/2}(S^m) \leq 2$$



Problema:

Si $TC(\text{total}) < (TC(\text{Base})+1)(TC(\text{Fibra})+1) \leftarrow$
se cumpliría en general para fibraciones, entonces
se podría resolver la indeterminación actual

$$3 \leq TC(\text{Klein}) \leq 4$$

$\uparrow \text{rel} \quad \uparrow \text{dim}$

En efecto:

$$S' \rightarrow \text{Klein} \rightarrow S'$$

Sin embargo, es posible que $TC(\text{Klein})$ resulte ser 4.
con lo que se daría un contraejemplo a

Con respecto a la conjetura de que

$$TC(P_n) \approx F(TC(P^{n_1}), r, e)$$

digamos : $TC(P_n) = TC(P^{n_1}) + r - 1$ cuando

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 2^l = n_1 \leq n_i \\ \bullet \nu(n_i + 1) \geq \phi(h_i) \end{array} \right\} i \geq 2$$

↗ # enteros en $\{1, 2, \dots, n_1\}$ que son
 $\equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 8$.

Demostración :

$$\textcircled{1} \quad TC(P^{n_1}) = zcl(P^{n_1}) \quad \text{si } n_1 = 2^l$$

$$\textcircled{2} \quad P_n \cong P^{n_1} \times S^{n_2} \times \dots \times S^{n_r}$$

(Davis 2010)

Verificación de ②

HR: $\exists \mathbb{R}^{n_i+1} \times \mathbb{R}^{n_i+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i+1}$ normada bilineal

$\leadsto S^{n_1} \times S^{n_2} \xrightarrow{\mu_i} S^{n_i}$ con $\mu|_{\{x\} \times S^{n_i}}$ es homeomorf

$\leadsto S^{n_1} \times S^{n_2} \times \dots \times S^{n_r} \rightarrow S^{n_1} \times S^{n_2} \times \dots \times S^{n_r}$
 $(x_1, x_2, \dots, x_r) \mapsto (x_1, \mu_2(x_1, x_2), \dots, \mu_r(x_1, x_r))$

es homeomorf. $\mathbb{Z}/2$ -equivariante, cuando

$\mathbb{Z}/2$ actúa en el $\begin{cases} \text{dominio diagonalmente} \\ \text{contradominio solo en } S^{n_1} \end{cases}$