Sistemas de control desde el punto de vista del problema de momentos

Abdon E. Choque Rivero[1]
Instituto de Física y Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Morelia, México

EMALCA–2013
Morelia, UMNSH, 23 de julio al 01 de agosto, 2013

[1]abdon.ifmgmail.com

Índice general

Introducción.

En este curso involucraremos dos tópicos aparentemente no conectados: Por un lado la Teoría de Control de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias y por el otro el Problema de Momentos, este último desde el punto de vista teorético funcional. Veamos algunas nociones de estos dos tópicos:

0.1. Nociones de la Teoría de Control de EDO

Los objetos controlables se ven literalmente a cada paso, el automóvil, avión, todos los instrumentos eléctricos, equipados con reguladores (por ejemplo, un refrigerador eléctrico), etc. Lo común en todos estos objetos es que podemos "controlarlos", podemos de una u otra forma influir en su conducta.

Nosotros consideraremos el primer caso, es decir trataremos con ecuaciones de la forma,

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{0.1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y f es una función suave.

Recalquemos que a diferencia de los resultados principales del estudio de ecuaciones con parámetros, los cuales se refieren a la continuidad y diferenciabilidad de las soluciones del sistema (0.1.1) que dependen del parámetro, en la teoría de control el parámetro u es una función $u : [t_0, T] \to \Omega$ continua a trozos (por la izquierda), que depende del tiempo, llamada **control** del sistema (0.1.1).

Conociendo la conducta del parámetro de control u, es decir, conociendo las funciones de control $u(t)$ para $t > t_0$, del sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = f(x, u(t)) \tag{0.1.2}$$

podemos unívocamente determinar el movimiento del objeto (para $t > t_0$), si conocemos la posición de fase del objeto en el momento $t = t_0$. Es decir, mediante la función dada $u(t)$ y la posición fase inicial x_0 de manera unívoca se determina la trayectoria de fase $x(t)$, $t > t_0$.

Con frecuencia el parámetro de control u no puede admitir valores completamente arbitrarios, sino están sujetos a algunas restricciones, denominados **controles admisibles**.

En la Teoría de Control son importantes los siguiente problemas:

a) Dado un modelo matemático, se puede garantizar que es controlable?

b) Cómo determinar un control?

c) Cómo hallar un control óptimo en algún sentido?

La teoría de control óptimo (TCO) surgió en los años 50's en respuesta a los esfuerzos de los estadounidenses y rusos por explorar el espacio cosmico. La TCO incluye problemas de optimización.

Por ejemplo, se desea construir trayectorias a lo largo de las cuales un vehículo espacial, controlado por un motor a propulsión pueda llegar a su destino en un tiempo mínimo, o usando el mínimo de combustible.

Se consideran iniciadores de teoría de control óptimo al matemático ruso Lev Pontryagin, quien con coautores sugirió el método del Principio del Máximo de Pontryagin (PMP) y el ingeniero estaounidense Richard Bellman, autor de el método de la Programación Dinámica (PD).

En el presente curso consideraremos solamente el método PMP.

0.2. Nociones del Problema de Momentos

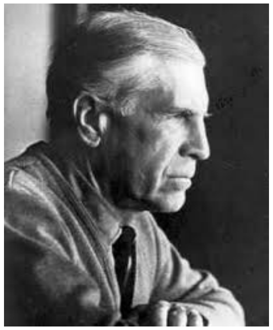
El matemático ruso Chebyshev fue, aparentemente, el primero en considerar el problema de momentos.

$$c_0 = \int_a^b f(u)du, \qquad c_1 = \int_a^b uf(u)du, \qquad c_k = \int_a^b u^k f(u)du.$$

El concepto de problema de momentos lo introdujo Stieltjes en 1894, quien también introdujo el concepto de integral de Stieltjes [1].

Dar una distribución de masa positiva en la recta $[0, \infty)$, significa dar una función no decreciente $\sigma(u)$ ($u \geq 0$) tal que el incremento $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$ representa para cualquier $\alpha \geq 0$ y $\beta > \alpha$ la masa que corresponde al intervalo $[\alpha, \beta]$. La masa completa del conjunto $[0, \infty)$ se representa en la forma

$$\lim_{\beta \to \infty} [\sigma(\beta) - \sigma(0)] = \int_0^\infty d\sigma(u),$$



Pontryagin [1908–1988]

Lev Semenovich Pontryagin, 1908–1988. Matemático soviético nacido en Moscú. Sus aportaciones principales: en topología algebráica y topología diferencial y control óptimo.
En 1961 publicó junto con V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze y E. F. Mishchenko su libro ”Teoría matemática de los procesos óptimos”

R. Bellman [1920–1984]

Richard Ernest Bellman (1920-1984) fue un matemático aplicado, cuya mayor contribución fue el método denominado programación dinámica publicado en:
Bellman R: An introduction to the theory of dynamic programming RAND Corp. Report 1953.

mientras que

$$\int_0^\infty u d\sigma(u), \qquad \int_0^\infty u^2 d\sigma(u),$$

representan los momentos estáticos de la distribución de masa considerada y el momento de inercia respecto del punto $u = 0$. Stieltjes llama momento generalizado de orden k a la integral

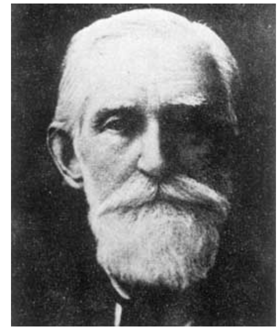
$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u).$$

Consecuentemente en el problema de Stieltjes se tiene una sucesión de números s_k $(k = 1, 2, \ldots)$ y se busca una función no negativa $\sigma(u)$, para $u \geq 0$, tal que se satisface

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u) = s_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

El matemático alemán Felix Hausdorff (8 de noviembre de 1868, 26 de enero de 1942)

Nuestro enfoque para el estudio del problema de momentos de Hamburger ($I = \mathbb{R}$), Stieltjes ($I = [0, \infty)$), Hausdorff ($I = [a, b]$), (abreviado PM) es llevar o



Chebyshev [1821 - 1894]

La interpretación mecánica del problema de Chebyshev [1] se describe así: Sean dados la longitud, el peso, el lugar del centro de gravedad y los momentos de inercia de una barra rectilínea con densidad desconocida que cambia de un punto a otro. Se requiere hallar la función densidad.

Stieltjes [1856 - 1894]

En su manuscrito sobre fracciones continuas Stieltjes escribió:. ”Vamos a llamar problema de momentos al siguiente problema: Encontrar la distribución de una masa positiva en el intervalo $[0, \infty)$, si son dados sus momentos de orden k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.”

trasladar el problema PM a un problema que involucra funciones holomorfas de la forma

$$s(z) = \int_I (\tau - z)^{-1} d\sigma(\tau), \tag{0.2.3}$$

donde σ es medida positiva (o función monótona no decreciente de variación acotada) sobre $I \subseteq \mathbb{R}$.

La solución del PM se dá mediante la relación

$$s(z) = \frac{\alpha(z)\omega(z) + \beta(z)}{\gamma(z)\omega(z) + \delta(z)},$$

donde ω pertenece a una cierta clase de funciones holomorfas de la forma (0.2.3) y α, β, γ y δ son polinomios que dependen de los momentos $(s_j)_j^m$.

Normalizando σ por la condición

$$\sigma(t) = (\sigma(t + 0) - \sigma(t - 0))/2, \qquad \sigma(0) = 0,$$

ésta función es determinado únicamente por la siguiente fórmula inversa de Stieltjes:

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^t Im\, s(x + i\varepsilon) dx, \qquad t \in [a, b].$$

Hausdorff [1868 - 1942]

Resolvió el problema de momentos: Dada una secuencia de números $\{s_j\}_{j=0}^k$ hallar una medida positiva μ (o función monótona no decreciente de variación acotada $\mu(t)$) sobre $[0,1]$ tal que

$$s_j = \int_0^1 t^j d(\mu(t)), \quad j = 0, \ldots, k$$

Bibliografía

[1] Akhiezer N. I.: *The Classical Moment Problem*, 1965, Oliver and Boyd

[2] Butkovskii A.G.: *Structural Theory of Distributed Systems*, 1984, Prentice Hall PTR.

[3] L. E. Elsgoltz: Calculus of Variations, Pergamon Press Ltd., 1962

[4] Gantmacher, F.R. (1959)*Matrix Theory. Vol 2*, AMS Chelsea Publishing.

[5] V.I. Korobov, G.M. Sklyar: *Time optimality and the power moment problem*, Mat. Sb. 134 (176) (1987), 186–207;

[6] N.N. Krasovskii, *Control of dynamical systems*. Nauka, Moscow, 1985.

[7] Krein M.G., Nudelman A.A.: *The Markov moment problem and extremal problems*, 1977, AMS Vol. 50

[8] E. Lee and L. Markus, Foundations of Optimal Control , Wiley, 1967.

[9] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanski, R.V. Gamkrelitse and E.F. Mischenko: *The mathematical theory of optimal processes*, Fizmatgiz, Moscow, 1961.

—— **Problema de momentos y polinomios ortogonales**

[10] A. E. Choque Rivero, Yu. M. Dyukarev, B. Fritzsche, and B. Kirstein, *A truncated matricial moment problem on a finite interval. Oper. Theory: Adv. Appl.* **165** (2006) 121–173.

[11] A. E. Choque Rivero, Yu. M. Dyukarev, B. Fritzsche, and B. Kirstein, *A Truncated Matricial Moment Problem on a Finite Interval. The Case of an Odd Number of Prescribed Moments. Oper. Theory: Adv. Appl.* **176** (2007) 99–174.

[12] Choque Rivero A.E., Yu.Dyukarev, *A matrix version of one Hamburger Theorem*, Mathematical Notes, Vol. 91(4) (2012) 493–499 .

[13] Choque Rivero A.E., Zagorodnyuk The strong matrix Stieltjes moment problem, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol 18, No.2,(2012), 151-170.

[14] Choque Rivero A. E., *The Resolvent Matrix for the Matricial Hausdorff Moment Problem Expressed by Orthogonal Matrix Polynomials*, Complex Anal. Oper. Theory, 7(4) (2013) 927–944.

[15] Choque Rivero A. E., A. Lasarow, *The EnestrmKakeya theorem encounters the theory of orthogonal polynomials on the unit circle*. Linear Algebra and its Applications, 439 (2013) 1258-1285.

[16] A. E. Choque Rivero, L. Garza, B. Aguirre, *Moment Perturbation of Matrix Polynomials*, en preparación.

[17] A. E. Choque Rivero, C. Maedler, *Representation of Perturbed Orthogonal Matrix Polynomials*, submitted to Complex Anal. Oper. Theory.

[18] A. E. Choque Rivero, *The Stieltjes Parameters of the Truncated Hausdorff Matrix Moment Problem*, submitted to Complex Anal. Oper. Theory.

———— **Teoría de control**

[19] Avdonin S., Choque Rivero A.E., L. de Teresa; Exact Boundary Controllability of Coupled Hyperbolic Equations, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, Vol. 23(4) (2013).

[20] Choque Rivero A.E., Yu. Karlovich; The time optimal control as an Interpolation Problem, Proceedings of Analysis, Mathematical Physics and Applications. Commun. Math. Anal,Conf. 03 (2011), 66–76.

[21] Choque Rivero, A.E.; Korobov, V.I.; Sklyar, G.M.; The admissible control problem from the moment problem point of view, Applied Mathematics Letters, Vol.23, No. 1, (2010), 58-63.

[22] Choque Rivero A.E.; Solution of a Synthesis Problem of a Nonlinear Control System, Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mekh., ISSN: 0453-8048 Vol. 59, No. 850,(2009), 45–51.

[23] Choque Rivero A.E.; The Controllability Function Method for the Synthesis Problem of a Nonlinear Control System, International Review of Automatic Control, Vol. 1, No. 4 (2008), 441–445.

[24] Choque Rivero A.E.; Korobov V.I.; Skoryk V.O.: Controllability function as time of motion II. Mat. Fiz. Anal. Geom Vol.11(3) (2004), 341-354.

Capítulo 1

Sistemas controlables

Son objetos controlables el automóvil, avión, todos los instrumentos eléctricos, equipados con reguladores, común en todos estos objetos es que podemos “controlarlos”.

Nosotros consideramos modelos matemáticos de procesos controlables y no así de objetos reales. En la teoría de control los objetos principales son los sistemas de ecuaciones que dependen de un parámetro de control u, por ejemplo, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), en diferencias, en derivadas parciales, tales sistemas se llaman **sistemas controlables**. Nosotros trataremos con sistemas EDO de la forma

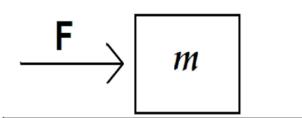
$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r. \tag{1.0.1}$$

donde f es continua diferenciable, $\mathbb{R}^n$ es el espacio de estados x del sistema; $\mathbb{R}^r$ es el espacio de controles.

A diferencia del estudio de ecuaciones diferenciales con parámetros donde el parámetro u es un número fijo, en la teoría de control u es una función $u : [0,T] \to \mathbb{R}^r$ continua a trozos (por la izquierda), que depende del tiempo, llamada **control** del sistema (1.0.1).

1.1. Ejemplo de un sistema controlable

Sea que una partícula se mueva en forma rectilinea sin fricción al cual se le aplica una fuerza F.



Sea que una partícula se mueva en forma rectilinea sin fricción al cual se le aplica una fuerza acotada F.

De acuerdo a la segunda ley de Newton el movimiento de dicha partícula despreciando fricciones está dado por la ecuación $F = ma$. Supongamos que y representa la posición de la partícula y $m = 1$. Hagamos $u = F$, entonces tenemos la ecuación

$$\ddot{y} = u, \quad |u| \leq 1.$$

Equivalentemente (denotando $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$) tenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \quad |u| \leq 1. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Sea dado un posición inicial x_0. Por ejemplo, deseamos hallar el control óptimo $u = u(t)$ y la trayectoria correspondiente $x(t)$, con $x(0) = x_0$, y $x(T) = 0$ que minimice el tiempo de recorrido, $T \to$ mín.

1.2. Nociones preliminares

Consideremos el sistema de E.D.O.

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1.2.3}$$

donde f está definido en $D \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. El conjunto $\mathbb{R}^n$ se llama *espacio fase* de (1.2.3), cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de *vector fase*.
La solución $x = \tau(t)$ es solución de (1.2.3) si $\tau(t)$ (*trayectoria fase*) satisface (1.2.3), es continua en D y diferenciable en D excepto en un conjunto finito Γ de puntos. La solución $\tau(t)$ se puede escribir en forma paramétrica: $x_1 = \tau_1(t), \cdots, x_n = \tau_n(t)$

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(t,x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, u \text{ vector parámetro} \tag{1.2.4}$$

$$y = C(t)x, \qquad C(t) \in M_{n\times n} \tag{1.2.5}$$

(1.2.4) es un sistema de control si cuando $u = u(t)$ (llamado entrada). La función y se llama salida de (1.2.4) o parte observable de (1.2.4).

Definición 1.2.1 *Si para el par de puntos $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe una función continua a trozos $u(t)$ definida en $[t_0, T]$ tal que la solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.6}$$

es tal que satisface $x(T) = x_1$, entonces se dice que el control $u(t)$ traslada o lleva x_0 en x_1 en tiempo $T - t_0$.

Definición 1.2.2 (Completamente Controlable) *El sistema de control (1.0.1) se llama completamente controlable, denotado como CC, si $\forall\, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ existe con control admisible $u(t)$ definida en $[t_0, T]$ tal que traslada x_0 a x_1.*

1.2.1. Matrices definida positivas

Sea dada A una matriz real simétrica de dimensión $n \times n$.

Definición 1.2.3 *a) La forma cuadrática $x^T A\, x$ se llama nonegativa definida (positiva definida) si $x^T A\, x \geq 0$ para $x \in \mathbb{R}^n$ ($x^T A\, x > 0$ para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).*
b) La matriz A que determina la forma cuadrática anterior se llama nonegativa definida (positiva definida) si su forma cuadrática es nonegativa definida (positiva definida).

Criterio de Sylvester. La matriz A simétrica es definida positiva si y sólo si

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

1.2.2. Matrix exponente

Sea dada una matriz A de dimensión $n \times n$. La matriz exponencial e^{At} se define mediante la relación

$$e^{At} := \sum_{0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \tag{1.2.7}$$

Esta matriz esta bien definida en virtud a la desigualdad $||e^{At}|| \leq e^{t||A||}$.

Definición 1.2.4 *Sea una matriz A real de dimensión $n \times n$. El polinomio $p_m(\lambda) = c_m \lambda^m + c_{m-1}\lambda_{m-1} + \ldots + c_1 \lambda + c_0$ de grado m se llama anulador de la matriz A si*

$$p_m(A) = c_m A^m + c_{m-1} A_{m-1} + \ldots + c_1 A + c_0 I_m = 0_m$$

donde I_m y 0_m representan la matrix identidad y la matriz cero de dimensión $n \times n$, respectivamente.

Por el teorema de Cayley–Hamilton, el polinomio característico de una matriz es un polinomio anulador de esta matriz.

Definición 1.2.5 *Sea una matriz A real de dimensión $n \times n$. Se llama polinomio mínimo de la matriz A, denotado por $m_A(\lambda)$, al polinomio anulador de A de menor grado.*

La matriz e^{At} se puede calcular utilizando la forma de Jordan de la matriz A. Otro método consiste en hallar la matriz e^{At} a través de una suma finita de funciones quasipolinomiales y exponentes de A.

Teorema 1.2.1 *Sea A una matriz real $n \times n$ y $m_A(\lambda) = b_p \lambda^p + b_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + b_0$ el polinomio mínimo. Entonces la matriz exponente e^{At} tiene la siguiente forma: $e^{At} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(t) A^k$ donde $\alpha_k(t)$ para $k = 0, \ldots, p-1$, es la solución del ecuación diferencial*

$$b_p \alpha_k^{(p)} + b_{p-1} \alpha_k^{(p-1)} + \ldots + b_0 \alpha_k = 0$$

con condiciones iniciales $\alpha_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}$

1.3. Controlabilidad de sistemas de control EDO

Consideremos el sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu\ ,\ x \in \mathbb{R}^n\ u \in \mathbb{R}^r, \tag{1.3.8}$$

donde las matrices A, B son constantes, de dimensiones $n \times n$ y $r \times n$, respectivamente. Sean definidas las siguientes matrices:

$$Q := \left(B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right) \tag{1.3.9}$$

de dimensión $n \times n\, r$, denomidado matriz de Kalman, y la matriz $n \times n$

$$N(t_0, T) := \int_{t_0}^{T} e^{-At} B B^* e^{-A^* t} dt. \tag{1.3.10}$$

Teorema 1.3.1 (Criterio de controlabilidad de sistemas lineales constantes) *Son equivalentes las siguientes 3 afirmaciones:*

a) *El sistema* (1.3.8) *es completamente controlable en* $[t_0, T]$.

b) Rango $(Q) = n$

c) $N(t_0, T) > 0$

Además la función

$$u(t) = B^* e^{-A^* t} N^{-1}(t_0, T) \left(e^{-At} x_1 - e^{-At_0} x_0\right) \tag{1.3.11}$$

es uno de los posibles controles que transladan $x(t_0) = x_0$ a $x(T) = x_1$ en tiempo $T - t_0$ mediante el control $u(t)$.

Demostración. La demostración se lleva a cabo en 3 partes: CC $\Rightarrow$ Rango $(Q) = n$. Utilizando la fórmula de Cauchy para (1.3.8) con $x(t_0) = x_0$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{1.3.12}$$

Por contradicción: sea que el sistema sea CC pero $Rango(Q) < n$ $\Rightarrow$ filas son linealmente dependientes $\Rightarrow \exists\zeta \neq 0$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\zeta^* Q = 0 \;\Rightarrow\; \zeta^* B = \zeta^* AB = \cdots = \zeta^* A^{n-1}B = 0 \tag{1.3.13}$$

y por el desarrollo de e^{At} en forma de suma finita (**??**) $e^{At} = \sum_{s=1}^{p-1}\alpha_s(t)A^s$, tomando $x_0 = 0$, $x_1 = \zeta$, ya que por condición de CC existe $u(t)$ tal que la trayectoria de (1.3.8) con $u = u(t)$ comienza en $x(0) = x_0$ en tiempo T alcanza ζ, es decir, $x(T) = x_1 = \zeta$, sustituyendo t by T in (1.3.12), tenemos,

$$x(T) = e^{A(T-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{T} e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

pero $x_0 = 0$ y $x(T) = x_1 = \zeta$, entonces:

$$\zeta = \int_{t_0}^{T} e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{T}\left(\sum_{s=1}^{p-1}\alpha_s(t)A^s\right)Bu(\tau)d\tau$$

Ahora multiplicando por ζ^* por la izquierda:

$$\zeta^*\zeta = \|\zeta\|^2 = \int_{t_0}^{T}\sum_{s=1}^{p-1}\alpha_s(t)\zeta^* A^s Bu(\tau)d\tau = 0 \text{ por (1.3.13)}$$

$p \leq n$, donde $p = degree(m_A(\lambda))$ (polinomio mínimo de A)

$$\Rightarrow\; \zeta = 0 \text{ contradicción } \;\Rightarrow \boxed{CC \Rightarrow \text{Rango}\,(Q) = n}.$$

En inciso 1) queda demostrado.
2) $[Rango(Q) = n \Rightarrow N(t_0, T) > 0]$ Por contradicción. Sea que la matriz $N(t_0, T)$ no es positiva definida. Denotemos la forma cuadrática

$$V(x) := x^* N(t_0, T)x \tag{1.3.14}$$

la cual no es positiva definida, denotado como $V(x) \not> 0$. De (1.3.10) tenemos

$$V(x) = \int_{t_0}^{T}\left(x^* e^{-At}B\right)\left(B^* e^{-A^* t}x\right)dt.$$

Denotando $\left(x^* e^{-At}B\right) =: y^*$, $\left(B^* e^{-A^* t}x\right) =: y$ y recordando que $y^* y = \|y\|^2$, entonces se tiene:

$$V(x) = \int_{t_0}^{T}\left\|B^* e^{-A^* t}x\right\|^2 dt \;\Rightarrow\; V(x) \geq 0.$$

Por (1.3.14), $V(x) \not> 0$, entonces existe una vector $\zeta \neq 0$ tal que $V(\zeta) = 0$, consecuentemente $\int_{t_0}^{T}\left\|B^* e^{-A^* t}x\right\|^2 dt = 0$ que es equivalente a la igualdad $\left\|B^* e^{-A^* t}\zeta\right\| = 0$ en $[t_0, T]$, es decir, $B^* e^{-A^* t}\zeta = 0$. Derivando:

$$\begin{cases} \zeta^* e^{-At}B & = 0 \\ -\zeta^* Ae^{-At}B & = 0 \\ \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ (-1)^n\,\zeta^* A^{n-1}e^{-At}B & = 0 \end{cases} \tag{1.3.15}$$

tomando en cuanta la igualdad $e^{At}A^k = A^k e^{At}$ y denotando $q^* = \zeta^* e^{-At_0}$, donde $q^* \neq 0$, tenemos que (1.3.15) se reescribe como:

$$\begin{cases} q^* B & = 0 \\ q^* AB & = 0 \\ \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ q^* A^{n-1}B & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow q^* Q = 0 \Rightarrow \boxed{Rango(Q) < n}$$

El inciso 2) queda demostrado.
3) $N(T) > 0 \Rightarrow$ CC. Si $N(T) > 0$ entonces existe la matriz inversa $N^{-1}(T)$, sustituyendo (1.3.11) en (1.3.12) para $t = T$ tenemos

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{A(T-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{T} e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{A(T-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{T} e^{A(T-\tau)}B\Big(B^* e^{-A^*\tau}N^{-1}(T)\left(e^{-AT}x_1 - e^{At_0}x_0\right)\Big)d\tau = x_1. \end{aligned}$$

$\forall\; x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, entonces el sistema (1.0.1) es CC.

1.4. Sistemas lineales con matrices que dependen del tiempo

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad A(t) \in M_{n\times n}, \quad B(t) \in M_{n\times r}. \tag{1.4.16}$$

Definamos el operador $\Delta := -A(t) + \frac{d}{dt}$ sobre el conjunto de matrices $n-1$ continuas diferenciables $M_{n\times r}$:

$$\begin{aligned} &\Delta^0 B(t) = B(t), \quad \Delta^1 B(t) = \left(-A(t) + \frac{d}{dt}\right)B(t) = -A(t)B(t) + \dot{B}(t) \\ &\Delta^k B(t) = \Delta(\Delta^{k-1}B) \end{aligned}$$

Sea $Q(t) := \left(B, \Delta B, \cdots, \Delta^{n-1}B\right)$

Teorema 1.4.1 (Condición necesaria y suficiente de controlabilidad completa) *Sea $A(t), B(t)$ de la clase $C^{n-1}[t_0, T]$, si $\exists t_1 \in [t_0, T]$ tal que $rango(Q(t_1) = n$, entonces el sistema (1.4.16) es CC en $[t_0, T]$*

Ejemplo 1.4.1 Consideremos el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el criterio de Kalman se tiene que

$$\text{rang}(B, AB) = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es igual a 2 para $\alpha \neq 0$ por lo tanto el sistema en este caso es completamente controlable, y para $\alpha = 0$ el rango es 1 por lo tanto el sistema no será completamente controlable.

Capítulo 2

Principio de Máximo de Pontryagin

El principio del máximo de Pontryagin determina las condiciones necesarias de optimalidad de un control, en sistemas de control.

Sea que el objeto de control se describe mediante el sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x = (x_1, ..., x_n), \; u = (u_1, .., u_r). \tag{2.0.1}$$

Suponemos que el control u toma valores en un conjunto cerrado (compacto) U de $\mathbb{R}^r$. Asumimos que $f(x,u)$ es continua respecto de u, x, y posee derivadas parciales respecto de x_j, $j = 1, \dots, n$. Llamaremos controles admisibles a funciones u continuas a trozos que toma valores en el conjunto U. El problema de control óptimo tiene el siguiente planteamiento: *entre todos los controles admisibles, que trasladan un punto de partida x^0 al punto terminal x^1, si tal control existe, hallar un control tal que*

$$J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u)dt \tag{2.0.2}$$

alcance el mínimo.

f_0 es continuo respecto de x y a continuo a trozos respecto de u. Consideremos una nueva coordenada x_0:

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x,u) \tag{2.0.3}$$

añadiendo (2.0.3) a (2.0.1) tenemos

$$\dot{\overline{x}} = \overline{f}(\overline{x}, u), \tag{2.0.4}$$

donde $\overline{x} = (x_0, x_1, ..., x_n)$, $\overline{f}(\overline{x}, u) = (f_0(\overline{x}, u), ..., f_n(\overline{x}, u))$. Notemos que $\overline{f}(\overline{x}, u)$ no depende de x_0.

Sea $\overline{x}^0 = (0, x^0)$ en espacio face $n+1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sea $u(t)$ un control admisible y $x(t)$ su trayectoria correspondiente que satisface $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$. De (2.0.3) $x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(x(\tau), u(\tau))d\tau$, para $t = t_1$

$$x_0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(\tau), u(\tau))d\tau = J(x,u)$$

De esta manera, en $\overline{x}$ la trayectoria fase $\overline{x}(t)$ que corresponde al control $u(t)$ pasa en $t = t_0$ por el punto $(0, x^0)$ y para $t = t_1$, por el punto $\overline{x}^1 = (J, x^1)$. Denotemos mediante Π la recta paralela al eje x_0 que pasa por $(0, x^1)$.

Consideremos funciones auxiliares $\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$ que satisfacen

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j(\overline{x}, u)}{\partial x_i} \psi_j \, , \quad i = \overline{0, n}. \tag{2.0.5}$$

Este sistema se llama adjunto al sistema (2.0.4).

Si se escoge un control $u(t)$ en $[0, t_1]$ se puede hallar la trayectoria $\overline{x} : \overline{x}(t_0) = \overline{x}^0$. Colocando en (2.0.5) tenemos

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j(\overline{x}(t), u(t))}{\partial x_i} \psi_j \, , \quad i = \overline{0, n}. \tag{2.0.6}$$

El sistema (2.0.6) satisface las condiciones de existencia y unicidad. (2.0.4) y (2.0.5) se pueden unir mediante la función,

$$\mathcal{H}(\overline{\psi}, \overline{x}, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(\overline{x}, u) = (\overline{\psi}, \overline{f}(\overline{x}, u)). \tag{2.0.7}$$

donde $\overline{\psi} = (\psi_0, ..., \psi_n)$. Entonces (2.0.4) y (2.0.5) se puede escribir como

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} \, , \quad i = \overline{0, n} \tag{2.0.8}$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \, , \quad i = \overline{0, n} \tag{2.0.9}$$

Notemos los vectores funciones $\overline{x}(t)$ y $\overline{\psi}(t)$ son continuos y son continuos diferenciables excepto en los puntos donde el control admisible $u(t)$ tiene saltos.

Para valores fijos de $\overline{x}$ y $\overline{\psi}$ la función $\mathcal{H}$ es una función de u. Denotemos $\mu(\overline{\psi}, \overline{x}) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\overline{\psi}, \overline{x}, u)$ o $\mu(\overline{\psi}, \overline{x}) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\overline{\psi}, \overline{x}, u)$ si el máximo se alcanza.

Teorema 2.0.2 *Sea $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, un control admisible tal que la trayectoria correspondiente $\overline{x}(t) : \overline{x}(t_0) = \overline{x}^0$ y que pasa por la recta Π para $t = t_1$.*

Para que $u(t)$ y $x(t)$ sean óptimos es necesario que exista un vector-función $\psi \not\equiv 0$, que corresponde a las funciones $u(t)$ y $x(t)$, tales que:

1. *$\forall t \in [t_0, t_1]$ la función $\mathcal{H}(\overline{\psi}, \overline{x}, u)$ alcanza el max resp de $u(t)$, es decir*
$$\mathcal{H}(\overline{\psi}(t), \overline{x}(t), u(t)) = \mu(\overline{\psi}(t), \overline{x}(t)) \tag{2.0.10}$$
2. *En el tiempo finito t_1, tiene lugar la relación*
$$\psi_0(t_1) \le 0, \quad \mu(\overline{\psi}(t_1), \overline{x}(t_1)) = 0 \tag{2.0.11}$$

Se puede mostrar que los vectores funciones $\overline{\psi}(t)$, $\overline{x}(t)$ y $u(t)$ satisfacen (2.0.8) y (2.0.9) y la condición (2.0.10) entonces las funciones $\psi_0(t)$ y $\mu(\overline{\psi}(t), \overline{x}(t))$ son constantes, así la condición (2.0.11) se puede verificar en cualquier t.

2.1. Principio del máximo. Problema de Boltza

Consideremos el sistema de control

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \le t \le T \tag{2.1.12}$$
$$x(t_0) = x_0, \tag{2.1.13}$$

y el funcional

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} F_0(s, x(s), u(s))ds + \phi(x(T)) \to \inf. \tag{2.1.14}$$

con el control restringido

$$u(t) \in U, \quad U \text{es un compacto en } \mathbb{R}^m. \tag{2.1.15}$$

donde f, $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; f, ϕ son continuamente diferenciables respecto de x, u y f_0 asumimos es continuo.

Denotemos
$$f_x(t, x, u) := \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i(t, x, u)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n},$$
donde i es el número de fila, j es el número de columna. ϕ_x es un vector columna, $(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n})^T$.

Asumimos que f, f_x y ϕ_x son funciones Lipschitz respecto de x y u.

Para t_0, T, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijos y $x(T)$ no fijo.

Teorema 2.1.1 *Sea $u_0(t)$ el control óptimo de (2.1.12)–(2.1.15) y $x_0(t)$ la trayectoria óptima. Entonces existe un vector $\psi(t)$ tal que*
$$\dot{\psi} = -\left(H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))\right)^T, \quad t_0 \le t \le T, \qquad \psi(T) = -\phi_x(x_0(T)),$$
tal que
$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \tag{2.1.16}$$
donde H se define mediante
$$H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = \psi^T f(t, x(t), u) - F_0(t, x(t), u). \tag{2.1.17}$$

Observemos que la función H en (2.1.16) se calcula respecto del parámetro $u \in U$ para t, $x_0(t)$, $\psi(t)$ fijos.

El algoritmo para determinar el control óptimo es el siguiente: 1) se determina $u_0(t, \psi(t), x_0(t))$ de (2.1.16).
2) sustituir u_0 en (2.1.12) se resuelve el problema de contorno respecto de $x_0(t)$ y $\psi(t)$.
3) sustituir $x_0(t)$ y $\psi(t)$ en el control u_0. Se obtiene $u_0(t)$. La función $u_0(t)$ es el control óptimo de (2.1.12), y (2.1.14) si el problema de contorno 2) tiene solución única.

2.2. Principio del máximo para la optimalidad en sentido del tiempo

En este caso el funcional es:

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0, \quad f_0(x, u) \equiv 1 \tag{2.2.18}$$

Formulemos el teorema del principio del máximo cuando en calidad de costo, funcional J se escoge la rapidez. Escribamos la función $\mathcal{H}(\overline{\psi}, \overline{x}, u)$ tomando en cuenta (2.2.18):

$$\mathcal{H}(\overline{\psi}, \overline{x}, u) = \psi_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x, u) \tag{2.2.19}$$

consideremos el vector n–dimensional

$$\psi(t) = (\psi_1, \dots, \psi_n)$$

y la función

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x, u) \tag{2.2.20}$$

De (2.2.20) tenemos

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = \overline{1, n} \tag{2.2.21}$$
$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n} \tag{2.2.22}$$

Denotamos $M(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u)$ o (max). Es claro que

$$M(\psi, x) = \mu(\overline{\psi}, x) - \psi_0 \tag{2.2.23}$$

Tomando en cuenta las notaciones introducidas, el teorema del principio de máximo se formula de la siguiente manera:

Teorema 2.2.1 *Sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ algún control admisible que lleve x_0 a x_1 y $x(t)$ su trayectoria fase correspondiente.*

Para que $u(t)$ se el control óptimo en sentido de la rapidez, es necesario que exista $\psi(t) \not\equiv 0$ que satisface (2.2.22) tal que:

1. *$\forall\, t \in [t_0, t_1]$, la función H alcanza su max:*
$$H(\psi(t), x(t), u) = M(\psi(t), x(t)). \tag{2.2.24}$$
2. *En el tiempo finito t_1, se satisface la condición*
$$M(\psi(t_1), x(t_1)) \geq 0. \tag{2.2.25}$$

OBS. Como en el caso general si $\psi(t)$, $x(t)$ y $u(t)$ satisfacen (2.2.21), (2.2.22) y (2.2.24), la función $M(\psi(t), x(t))$ es constante en $[t_0, t_1]$. Por eso cualquier verificación de (2.2.25) es válido en $t \in [t_0, t_1]$.

OBS. Las variables $\psi_0(t)$, $\psi_1(t), ..., \psi_n(t)$ se determinan salvo una constante. Ya que $\psi_0 = const$, entonces para el caso $\psi_0 \neq 0$ se puede tomar $\psi_0 = -1$. De ahí, de acuerdo al teorema,
$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \mu(\psi(t), x(t)) = 1,$$
sobre la trayectoria óptima.

2.3. Sistemas Lineales

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.3.26}$$

Donde A, B son matrices de dimensión $n \times n$ y $n \times r$. respectivamente, $u \in U \subset \mathbb{R}^r$ Asumimos que (2.3.26) es completamente controlable respecto de cada u_j. Tales sistemas se llaman *sistemas normales* Para que el sistema (2.3.26) se normal, es necesario y suficiente que las matrices

$$G_j = (b_j, Ab_j, \dots, A^{n-1}b_j), \quad j = \overline{1, r}$$

sean invertibles. Aqui b_j, $\quad j = \overline{1, r}$ son las columnas de la matriz B. Notemos que cada sistema normal es completamente controlable. Sin embargo, cada sistema completamente controlable puede no ser normal.

Sea que el conjunto de control U esté dado por $\{|u_j| \leq 1, \, j = \overline{1, r}\}$.

El hamiltoniano H para el sistema lineal (2.3.26) tiene la forma

$$H(\psi, x, u) = \psi^T Ax + \psi^T Bu = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{r} b_{ik} u_k \right) \tag{2.3.27}$$

El sistema adjunto al sistema (2.3.26) es:

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \tag{2.3.28}$$

De acuerdo al teorema 2.2.1, H alcanza su máximo en $u(t)$. Ya que H depende de u solamente en $\psi^T Bu$, entonces el control óptimo debe maximizar $\psi^T Bu$, tenemos,

$$\psi^T Bu = (\psi, Bu) = (B^T \psi, u) = \sum_{k=1}^{r} u_k \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \psi_i.$$

Cada u_k en esta suma cambia indepependiente de los otros u_j $j \neq k$. El máximo de cada sumando se alcanza en

$$u_k = sign \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \psi_i \quad k = \overline{1n}. \tag{2.3.29}$$

De esta manera, el control óptimo es una función constante a trozos que toma valores en los lados del cubo $|u_i| \leq 1$, $i = \overline{1n}$, es decir, u_r toma valores 1 o -1 de acuerdo al valor de $\sum b_{ik} \psi_i(t)$.

Se puede demostrar que si el sistema (2.3.26) es normal, entonces la relación (2.3.29) determina manera unívoca, para cada vector $\psi(t)$ distinto de cero, la función control $u_k(t)$, además esta función tiene un número finito de conmutaciones.

2.3.1. Teorema sobre los n intervalos

El número de conmutaciones del control óptimo u_k depende del punto inicial x^0 y del punto final x^1 y de los valores propios de A y de la forma del polihedro U en el espacio de controles.

Lema 2.3.1 *Si $\lambda_1, ..., \lambda_m$ son números reales distintos y $f_1(t), ..., f_m(t)$ son polinomios con coeficientes reales, que tienen grados $k_1, ..., k_m$ entonces la función*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t) e^{\lambda_i t}$$

tiene no más de $k_1 + ... + k_m + m - 1$ ceros reales.

Demo. Por inducción. Para m=1, $\varphi(t) = f_1(t) e^{\lambda_1 t}$.

Sea que el lema válido para $m = l - 1$. Demostraremos es válido para $m = l$. Por contradicción sea que para $m = l$ el lema no es válido y la función

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{l} f_i(t) e^{\lambda_i t}$$

tiene no menos de $k_1 + ... + k_l + l$ raíces reales. Multiplicando $\varphi(t)$ por $e^{-\lambda_l t}$, el número de raíces no cambia, tenemos

$$\varphi(t) e^{-\lambda_l t} = \sum_{i=1}^{l} f_i(t) e^{(\lambda_i - \lambda_l) t} + f_l(t).$$

Derivando esta expresión k_l+1 veces, tenemos

$$\varphi_1(t)=\sum_{i=1}^{l-1}\tilde{f}_i(t)e^{(\lambda_i-\lambda_l)t} \tag{2.3.30}$$

ya que entre los ceros de una función se tiene al menos un cero de la derivada, el número de ceros reales de $\varphi(t)$ va a ser no menos que $k_1+...+k_l+l-(k_l+1)=k_1+...+k_{l-1}+(l-1)$.

En la expresión (2.3.30) las funciones $\tilde{f}_i(t)$, $i=1,\dots,l=1$, tiene grados k_i, los números $\lambda_i-\lambda_l$ son distintos.

Para $m=l-1$ se asumió que el lema era válido, por eso $\varphi_1(t)$ tener no más de $k_1+...+k_{l-1}+(l-2)$ de ceros reales. La contradicción encontrada demuestra el lema.

Teorema 2.3.1 *Si los valores propios de A son reales y U es cubo $|u_k|\le 1$, $k=1,\dots,r$, entonces cada uno de los controles $u_k(t)$ es constante a trozos y tiene no más de $n-1$ conmutaciones (no mas de n intervalos) donde n es la dimensión del sistema.*

Demo. Sean $\lambda_1,...,\lambda_m$ valores propios de A, $r_1,...,r_m$ sus multiplicidades. Entonces la solución general de $\dot{\psi}=-A^T\psi$ tiene la forma

$$\psi_i(t)=\sum_{j=1}^{m}f_{ij}(t)e^{-\lambda_j t},\quad i=\overline{1,n}$$

donde f_{ij} es un polinomio de t de grado $\le r_j-1$. Colocando $\psi_i(t)$ en $u_k=sign\sum_{i=1}^n b_{ik}\psi_i(t)$, tenemos

$$u_k(t)=sign\sum_{i=1}^{n}b_{ik}\sum_{j=i}^{m}f_{ij}(t)e^{-\lambda_j t}=sign\sum_{j=i}^{m}\tilde{f}_{kj}(t)e^{-\lambda_j t} \tag{2.3.31}$$

donde $\tilde{f}_{kj}(t)=\sum_{i=1}^n b_{ik}f_{ij}(t)$ $(k=\overline{1,r},\ \ j=\overline{1,m}$ son polinomios de t de grado $\le r_j-1$. Aplicando el lema anterior, tenemos que la suma en la parte derecha de (2.3.31) tiene no más de

$$(r_1-1)+(r_2-1)+\cdots+(r_k-1)+(k-1)=r_1+r_2+\cdots+r_k-1=n-1$$

ceros. Lo que demuestra el teorema.

Consideremos el problema de existencia y unicidad

Teorema 2.3.2 *Sean $u_1(t)$ y $u_2(t)$ dos controles óptimos del sistema $\dot{x}=Ax+Bu$ definidos en $[t_0,t_1]$ y $[t_0,t_2]$ respectivamente, que trasladen x_0 a x_1. Si el sistema es completamente controlable entonces $t_1=t_2$ y $u_1(t)=u_2(t)$ excepto un número finito de puntos de discontinuidad.*

Demo. Seguimos considerando $U=\{|u_i|\le 1\}$. Sea $t_1\ne t_2$. Por ejemplo $t_1<t_2$ entonces $u_2(t)$ no seria óptimo, esto implica que $t_1=t_2$. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos trayectorias distintas del sistema que parte de x_0 que corresponde a $u_1(t),u_2(t)$. Por la fórmula de Cauchy:

$$x_1(t)=e^{A(t-t_0)}(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu_1(\tau)d\tau),$$

$$x_2(t)=e^{A(t-t_0)}(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu_2(\tau)d\tau).$$

Ya que $x_1(t_1)=x_2(t_1)=x_1$ y de $e^{A(t-t_0)}\ne 0$ tenemos

$$\int_{t_0}^{t_1}e^{-A\tau}Bu_1(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t_1}e^{-A\tau}Bu_2(\tau)d\tau. \tag{2.3.32}$$

Los controles $u^1(t)$ y $u^2(t)$ son óptimos, por eso existen funciones no triviales $\psi^1(t)$ y $\psi^2(t)$ que satisfacen

$$\dot{\psi}=-A^T\psi$$

tal que

$$\begin{aligned} u_k^1(t) &= sign\, b_k^T\psi^1(t)\\ u_k^2(t) &= sign\, b_k^T\psi^2(t),\quad k=\bar{1n} \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

Las soluciones $\psi^1(t)$ y $\psi^2(t)$ del sistema, tienen la forma

$$\psi^1(t)=e^{-A^T}\psi_0^1 \qquad \psi^2(t)=e^{-A^T}\psi_0^2, \tag{2.3.34}$$

donde $\psi_0^1=\psi_0^1(t_0)$ y $\psi_0^2=\psi_0^2(t_0)$. Para sistemas normales, más arriba se mostró que la relación (2.3.33) univocamente define los controles $u^1(t),u^2(t)$ excepto en un número finito de puntos de conmutación. En virtud a la óptimidad de $u^1(t)$ la función H alcanza en $u^1(t)$ su máximo, es decir,

$$\psi^T Bu^1(t)\ge\psi^2 Bu^2(t).$$

para todo ψ distinto de cero, no trivial. Además la igualdad se tiene solo si $u^1(t)=u^2(t)$.

De (2.3.32) tenemos

$$\int_{t_0}^{t_1}(\psi_0^1)^T e^{-A\tau}Bu_1(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t_1}(\psi_0^1)^T e^{-A\tau}Bu_1(\tau)d\tau$$

o bien,

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi^1(\tau+t_0)^T Bu_1(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t_1}\psi^1(\tau+t_0)^T Bu_1(\tau)d\tau$$

de la última igualdad se sigue que $u^1(t)=u^2(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ excepto en un número finito de puntos de conmutación. El teorema queda demostrado.

Los siguientes resultados son teoremas de existencia.

Teorema 2.3.3 *Si para el sistema (2.3.26) existe por lo menos un control que traslada x_0 a x_1 entonces existe un control óptimo en sentido de la rapidez que traslada x_0 a x_1.*

Teorema 2.3.4 *Si para el sistema (2.3.26) todos los valores propios de A se sitúan en el semiplano izquierdo y el origen es un punto interior de U entonces para todo x_0 en $\mathbb{R}^n$ existe un control óptimo que traslada x_0 a x_1.*

En el siguiente apartado demostraremos el principio del máximo para sistemas lineales.

2.4. Demostración del Principio del Máximo para sistemas lineales

Recordemos que consideramos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.4.35}$$

con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, matrices A, B de dimensiones $n \times n$ y $n \times r$, $u \in U \subset R^r$.

Vamos a considerar el caso cuando el punto inicial o punto de partida es $x(t_0) = x_0 \neq 0$ y terminal

$$x(t_1) = 0.$$

Además, asumimos que el origen yace en el interior de U, es decir, $0 \in \operatorname{int} U$.

Introducimos la función vectorial $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$. La función H en el caso lineal (2.4.35) tiene la forma,

$$H = (\psi, Ax + Bu).$$

El sistema adjunto al sistema (2.4.35) se escribe como

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \tag{2.4.36}$$

Si el control $u(t)$ es el óptimo y $x(t)$ su trayectoria óptima, la relación (2.2.24) toma la forma,

$$\psi(\tau)Bu(\tau) = \sup_{u \in U} \psi(\tau)Bu, \quad \tau \in [t_0, t_1] \tag{2.4.37}$$

la relación (2.2.25) toma la forma,

$$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) = (\psi(t_1), Ax(t_1)) + (\psi(t_1), Bu(t_1)) \geq 0. \tag{2.4.38}$$

Comencemos con la relación (2.4.38). Ya que $x(t_1) = 0$, entonces $(\psi(t_1), Ax(t_1)) = 0$. Tomando en cuenta que si damos o cambiamos los valores de $u \in U$ en un número finito de puntos, no se afecta al control $u(t) = u_1(t_1), \ldots, u_r(t_1)$ en $[t_0, t_1]$, entonces podemos colocar que $u_k(t_1) = 0$, $k = 1, \ldots, r$. De ahí, tenemos que (2.4.38) se satisface.

Ahora demostraremos la relación (2.4.37). Previamente introducimos el concepto de esfera de alcanzabilidad y algunos lemas.

Se llama esfera de alcanzabilidad al origen, denotado V_T, al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ de cuales se pueden llegar al origen en tiempo menor o igual a T.

Lema 2.4.1 *La esfera de alcanzabilidad es un conjunto convexo.*

Lema 2.4.2 *Si $x_0$es un punto interior de la esfera de alcanzabilidad V_T, entonces de x_0 se puede trasladar al origen en tiempo menor a T.*

Al $(u(t), x(t))$ llamaremos proceso admisible si $u(t)$ un control admisible, $x(t)$ su trayectoria correspondiente.

Lema 2.4.3 *Sea $(u(t), x(t))$, para $t \in [t_0, t_1]$ un proceso admisible con $x(t_0) = x_0$ y sea $\psi(t) = (\psi_1, ..., \psi_n)$ una solución arbitraria de (2.2.24), es decir de $\dot{\psi} = A^T \psi$. Entonces*

$$\frac{d}{dt}(\psi(t), x(t)) = \psi(t)Bu(t)$$

en todos los puntos de control de U es decir

$$(\psi(t_1), x(t_1)) - (\psi(t_0), x(t_0)) = \int_{t:_0}^{t_1} (\psi(\tau)Bu(\tau))d\tau$$

Demo. Derivando el producto escalar $(\phi(t), x(t))$, tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi, x) &= (\dot{\psi}, x) + (\psi, \dot{x}) \\
&= (-A^T\psi, x) + (\psi, Ax + Bu) \\
&= (-A^T\psi, x) + (\psi, Ax) + (\psi, Bu) \\
&= (-A^T\psi, x) + (A^T\psi, x) + (\psi, Bu)
\end{aligned}$$

Del teorema fundamental del cálculo se tiene,

$$\int_{t_0}^{t_1} d(\psi(t)x(t)) = \psi(t_1)x(t_1) - \psi(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)Bu(t)dt$$

OBS. Para $u \equiv 0$ tenemos $(\psi(t), x(t)) = 0$.

Ahora demostramos la desigualdad (2.4.37). Sea $(u(t), x(t))$ un proceso óptimo que traslada x_0 a 0 en tiempo $T = t_1 - t_0$. Sea V_T la esfera alcanzabilidad al origen. Es claro que x_0 pertenece a la frontera de V_T, es decir, $x_0 \in \partial V_T$, ya que si $x_0 \in intV_T$ entonces se prodría llegar en tiempo menor a T a cero. Construimos un hiperplano Γ al conjunto V_T en el punto x_0. Sea n el vector normal a Γ. Sea Π el semiespacio determinado por Γ que contiene V_T. Π consiste en los puntos $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(n, (x - x_0)) \geq 0. \tag{2.4.39}$$

Ya que V_T esta en el subespacio Γ, entonces $(n, (x - x_0)) \geq 0$, para $x \in V_T$. Sea $\psi(t)$ la solución de $\dot{\psi} = -A^T\psi$ con $\psi(t_0) = n$. Este vector no es trivial (ya que $n \neq 0$).

Mostraremos que $\psi(t)$ es aquella que satisface el principio del máximo, es decir, (2.4.37). Por contradicción, entonces existe $v \in \mathcal{U}$ tal que $\psi(\tau)Bu(\tau) < \psi(\tau)Bv$.

- Si $\tau < t_1$, entonces $(\psi, Bu(t))$ es continua por la derecha en τ, es decir, es continua en algún $[\tau, \tau']$.

  De la continuidad de u se sigue que para algún intervalo $[\tau, \tau + h]$ se satisface

  $$\psi(\tau)Bu(t) < \psi(t)Bv \tag{2.4.40}$$

- Si $\tau = t_1$, entonces el control $u(t)$ es continuo, es decir, el producto escalar $(\psi(t), Bu(t))$ es continua por la derecha a la izquierda de τ. Entonces en álgun intervalo $[\tau - h, \tau]$ se satisface (2.4.40)

Así, de en cualquier caso existe un intervalo $[\tau_0,\tau_1]\subset[t_0,t_1]$ tal que es válido para $t\in[\tau_0,\tau_1]$.

Sea $u^*(t)=\begin{cases} v & \tau_0\le t<\tau_1 \\ u(t) & \text{en el resto de intervalo } [t_0,t_1] \end{cases}$ y $x^*(t)$ su trayectoria correspondiente tal que en tiempo $T=t_1-t_0$ traslada algún estado $x^*(t_0)=x_0^*$ a $x^*(t_1)=0$. Entonces $x_0^*\in V_T$ y por eso

$$(n,(x_0^*-x_0))\ge 0. \tag{2.4.41}$$

Del lema 2.4.3 para $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ tenemos

$$\psi(t_1)x(t_1)-\psi(t_0)x(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)Bu(t)dt$$

de manera análoga

$$\psi(t_1)x^*(t_1)-\psi(t_0)x^*(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)Bu^*(t)dt$$

restando tenemos, para $x(t_1)=x^*(t_0)=0$, tenemos,

$$\psi(t_0)(x(t_0)-x^*(t_0))=\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)B(u(t)-u^*(t))dt$$

pero

$$\psi(t_0)(x^*(t_0)-x(t_0))=n(x^*-x_0)$$

y $u^*(\tau)=u(\tau)$ en $[t_0,t_1]\setminus[\tau_0,\tau_1]$ entonces

$$(n,(x^*(t_0)-x(t_0)))=\int_{t_0}^{t_1}\psi(t)B(u(t)-v))dt<0$$

de aquí $(n,(x_0^*-x_0))<0$ lo que contradice (2.4.41). El teorema 2.2.1 para sistemas lineales con matrices constantes queda demostrado.

Capítulo 3

Problema de momentos

Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$. Sea dada una secuencia de números reales $(s_j)_{j\geq 0}$. Hallar el conjunto de medidas positivas σ sobre I (o funciones no decrecientes en I) tales que

$$s_j = \int_I t^j d\sigma(t), \quad j \geq 0 \tag{3.0.1}$$

- $I = [0, \infty)$, Problema de momentos de Stieltjes
- $I = (-\infty, \infty)$, Problema de momentos de Hamburger
- $I = [a, b]$, Problema de momentos de Hausdorff

1) Existencia de la solución del PM,
2) Unicidad de la solución problema de momentos,
3) Descripción del conjunto de soluciones.

Solución única — el MP se llama *determinado*
En otro caso —- el MP se llama *indeterminado*

Definición 3.0.1 *Si la secuencia de momentos dados s_j es finita y contiene un número impar o impar de momentos $(s_j)_{j=0}^m$ entonces el problema de momentos* (3.0.1) *se llama truncado (problema de Momentos de Hamburger, Stieltjes, Hausdorff truncado).*

Denotemos el conjunto de todas las soluciones del problema de Momentos de Hamburger truncado mediante $\mathcal{M}_n$.

3.1. Criterios de solución

Teorema 3.1.1 *a. El PM Hamburger, $I = (-\infty, +\infty)$ tiene solución si y solo si*

$$H_j := \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j} \end{pmatrix} \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

b. El PM Stieltjes, $I = [0, +\infty)$ tiene solución sii

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j} \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{j-1} \\ s_2 & s_3 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ s_{j-1} & s_{j+1} & \dots & s_{2j-1} \end{pmatrix} \geq 0,$$

c. El PM Hausdorff, $I = [a, b]$ tiene solución sii

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j} \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} \widehat{s}_1 & \widehat{s}_2 & \dots & \widehat{s}_{j-2} \\ \widehat{s}_2 & \widehat{s}_3 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \widehat{s}_{j-2} & \widehat{s}_{j+1} & \dots & \widehat{s}_{2j-2} \end{pmatrix} \geq 0$$

$\widehat{s}_j := -abs_j + (a + b)s_{j+1} - s_{j+2}$

3.2. Función asociada a la medida σ

Usualmente en cada situación σ se asocia una función holomorfa de la forma

$$s(z) = \int_I \frac{d\sigma(t)}{t - z} \tag{3.2.2}$$

donde $\sigma(t)$ es una medida positiva definida en I.

Tal función es denominada función asociada al problema de Momentos de Hamburger (Stieltjes, Hausdorff) truncado con $(s_j)_{j=0}^m$ momentos. El conjunto de funciones asociadas denotado mediante $\mathcal{Z}_m$.

Matriz Resolvente del Problema de Momentos truncado

Sea $U_j(z)$ una función que va de los complejos a las matrices complejas de tamaõ 2×2, es decir, $U_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, definida de la siguiente forma

$$U_j(z) := \begin{pmatrix} 1 - zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & zu_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \\ -zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j & 1 + zv_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j \end{pmatrix}. \tag{3.2.3}$$

Esta matriz se llama matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger, cuyas matrices $R_j(z)$, H_j, v_j, u_j se definen mediante

$$H_j = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j} \end{pmatrix}, u_j = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \end{pmatrix},$$

$$v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, R_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ z & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z^j & \dots & z & 1 \end{pmatrix},$$

con $H_j > 0$, es decir, H_j es positiva definida. Definimos:

$$\begin{aligned} \alpha_j(z) &:= 1 - z u_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j, \\ \beta_j(z) &:= z u_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j, \\ \gamma_j(z) &:= -z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} v_j, \\ \delta_j(z) &:= 1 + z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_j^{-1} u_j. \end{aligned}$$

Entonces la matriz resolvente $U_j(z)$ se puede escribir en la siguiente forma

$$U_j(z) = \begin{pmatrix} \alpha_j(z) & \beta_j(z) \\ \gamma_j(z) & \delta_j(z) \end{pmatrix}. \tag{3.2.4}$$

Las funciones $\alpha_j(z)$, $\beta_j(z)$, $\gamma_j(z)$ y $\delta_j(z)$, son polinomios que dependen de los momentos $(s_j)_{j=0}^m$.

Con las entradas de la matriz $U_j(z)$ se describen las soluciones del punto 3. Más precisamente, sea la función $s(z)$ definida de la siguiente forma:

$$s(z) := \frac{\alpha_j(z) w(z) + \beta_j(z)}{\gamma_j(z) w(z) + \delta_j(z)}, \tag{3.2.5}$$

es la función asociada a la solución del problema de momentos de Hamburger truncado, aquí, la función $w(z)$ es un parámetro de la solución, el cual está determinado por la relación

$$w(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t - z}. \tag{3.2.6}$$

Esta función es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donde μ es una medida positiva arbitraria en $\mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de parámetros w que satisface (3.2.6), denotemos con $\widetilde{\mathcal{R}} := \mathcal{R} \cup \{\infty\}$. De esta manera el conjunto de todas soluciones $\mathcal{Z}_n$ del problema de momentos de Hamburger se describe mediante el conjunto de parámetros $\widetilde{\mathcal{R}}$, ver Akhiezer [1].

Mediante la formula de inversión de Perron-Stieltjes se obtiene σ de la función asociada s. Considerando que para cualquier $t, c \in \mathbb{R}$ y que $c < t$:

$$\frac{\sigma(t+0) + \sigma(t-0)}{2} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_c^t \Im s(x + i\epsilon) dx, \tag{3.2.7}$$

donde se considera que las funciones que buscamos σ son continuas por la izquierda, es decir $\sigma(t) = \sigma(t-0)$. Esto se puede consultar de la página 124 de [1], así como en la página 11 de la sección 59 (volumen II) de [1].

J-forma de la Matriz Resolvente de Hamburger

Una de las propiedades más importantes de la matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger son las denominadas J-propiedades, con las cuales, junto con el Teorema de Identidad para funciones analíticas, nos permitirá encontrar la inversa de la matriz resolvente de manera explícita.

Más precisamente, sea J una matriz de dimensión $p \times p$ con las siguientes 2 propiedades: $J^* = J$ y $J^2 = I_q$, donde I_q denota la matriz identidad de tamaõ $q \times q$, es decir, $I_q \in \mathbb{C}^{q \times q}$ sea A una matriz $p \times p$, entonces las J-propiedades de A se clasifican de la siguiente forma:

- A es J-contractiva si y solo si $J - AJA^* \geq 0$.
- A es J-expansiva si y solo si $J - AJA^* \leq 0$.
- A es J-unitaria si y solo si $J - AJA^* = 0$.

Se demuestra en la página **??** que considerando la matriz

$$\tilde{J}_q = \begin{pmatrix} 0_q & -iI_q \\ iI_q & 0_q \end{pmatrix} \tag{3.2.8}$$

donde 0_q denota la matriz 0 de tamaõ $q \times q$, es decir, $0_q \in \mathbb{C}^{q \times q}$, entonces la matriz resolvente satisface

$$\tilde{J}_q - U_j(z) \tilde{J}_q U_j^*(z) = x \begin{cases} \geq 0, & \Im z \in (0, \infty) \\ = 0, & z \in \mathbb{R} \\ \leq 0, & \Im z \in (-\infty, 0) \end{cases} \tag{3.2.9}$$

es decir:

- $U_j(z)$ es $\tilde{J}_q$-contractiva cuando $\Im z > 0$.
- $U_j(z)$ es $\tilde{J}_q$-unitaria cuando $\Im z = 0$ $(z \in \mathbb{R})$.
- $U_j(z)$ es $\tilde{J}_q$-expansiva cuando $\Im z < 0$.

Capítulo 4

Problema de control como problema de momentos

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = x_0, |u| \leq 1 \tag{1}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Se requiere hallar:
P1. El conjunto de todos los controles $u = u(t)$, $|u(t)| \leq 1$, tales que la trayectoria $x(t)$ del sistema $\dot{x} = Ax + bu(t)$ partiendo del punto inicial $x(0) = x_0$ arribe al origen en tiempo $\theta > \theta_{\text{mín}}$, es decir $x(\theta) = 0$.

Esquema de solución

Consideramos el problema de la contrabilidad cero para el sistema canónico (SNC) bajo restricciones sobre el control. En el estudio del problema (SNC) seguimos el siguientes pasos:
I.) El problema (SNC)
$\Updownarrow$
II.) L–problema de momentos de Markov
$\Updownarrow$
III.) Problema de momentos de Hausdorff.
$\Updownarrow$
IV.) Desigualdad Matricial Fundamental (FMI) de Potapov.

En el presente trabajo se obtienen:
A.) El conjunto de todos los controles u, que sean solución del problema SNC para $\theta > \theta_{\text{mín}}$. $\theta_{\text{mín}}$ es el tiempo mínimo (Time Optimal Control).
B.) Se presenta un ejemplo.

Solución del problema SNC

S1. Reducción del problema SNC a un L-problema de momentos de Markov.

La solución del sistema (1) tiene la forma

$$x(\theta) = e^{A\theta}\left(x_0 + \int_0^\theta e^{-A\tau} bu(\tau)d\tau\right) \tag{3}$$

De la completa controlabilidad del sistema (1), se deduce que existe θ tal que $x(\theta) = 0$. Tomando en cuenta la relación

$$e^{-A\tau}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \\ \vdots \\ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\tau^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(3) representamos en la forma

$$-x_0^j = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\int_0^\theta \tau^{j-1}u(\tau)d\tau,\ j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aquí $x_0^T = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$.

La última relación representamos en la forma

$$\frac{\theta^j + (-1)^j j! x_0^j}{2j} = \int_0^\theta \tau^{j-1}f(\tau)d\tau. \ (5)$$

Donde $f(\tau) = \frac{1}{2}(u(\tau) + 1)$, $f \in \mathcal{C}_f$. Donde $\mathcal{C}_1^f = \{f : 0 \leq f(\tau) \leq 1\, \tau \in [0, \theta]\}$.
(5) escribimos de la forma

$$c_j(\theta, x_0) = \int_0^\theta \tau^j f(\tau)d\tau,\ j \in \{0, \cdots, n-1\}\ (6)$$

(6) representa un 1–problema de momentos de Markov (PMM).

S2. Usando la relación

$$
\begin{aligned}
s_j &= \frac{1}{j!} \cdot \begin{vmatrix} c_0 & -L & \cdots & 0 \\ 2c_1 & c_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (j-1)c_{j-2} & (j-2)c_{j-3} & \cdots & -(j-1)L \\ jc_{j-1} & (j-1)c_{j-2} & \cdots & c_0 \end{vmatrix} \\
&= c_j + c_0 c_{j-1} + \cdots , \qquad (7)
\end{aligned}
$$

se reduce a un Problema de Momentos de Hausdorff (PMH).

El PMH es el siguiente: Dados $\{s_j\}_{j=0}^{n} \in \mathbb{R}$, hallar el conjunto $\mathcal{M}([0,\theta], \{s_j\}_{j=0}^{n})$ de medidas positivas σ, tales que se cumple

$$s_j = \int_0^\theta \tau^j \sigma(d\tau), \; j \in \{0, \cdots, n\}. \qquad (8)$$

Preposición 1. [10, Krein/Nudelman]*El L–problema de momentos de Markov (7) es soluble si y sólo si el problema de momentos de Hausdorf (8) es soluble.*

Usando la transformada de Stieltjes de una medida positiva σ: $s(z) = \int_0^\theta \frac{\sigma(d\tau)}{\tau - z}, \sigma \in \mathcal{M}[0,\theta], (9)$
el PMH es equivalente al problema de hallar el conjunto $\mathcal{L}([0,\theta], \{s_j\}_{j=0}^{n})$ de funciones s: s sean transformadas de $\sigma : \sigma \in \mathcal{M}([0,\theta], \{s_j\}_{j=0}^{n})$.

Del PMH a la Desigualdad Fundamental de Potapov
Definicion 2. Sea $n = 2p + 1$. Usando $s_0, s_1, \ldots, s_{2p+1}$ construimos las siguientes matrices

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}_1 &= \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^{p}, \; \tilde{K}_2 = \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^{p} \\
T &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{p+1}, \\
v &= column[1, 0, \ldots, 0] \\
u &= column[-s_0, -s_1, \ldots, -s_p], \\
R_T(z) &= (I - zT)^{-1}. \\
K_1 &= \tilde{K}_2, \quad K_2 = \theta\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2, \\
u_1 &= u, \quad u_2 = -u + \theta T u.
\end{aligned}
$$

Además introducimos dos funciones auxiliares

$$
\begin{aligned}
\tilde{s}_1(z) &= z s(z), \\
\tilde{s}_2(z) &= (\theta - z) s(z), z \in \mathbb{C} \setminus [0,\theta]. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Donde $s(z) \in \mathcal{L}([0,\theta], \{s_j\}_{j=0}^{2p+1})$.

Definición 3. Sea $n = 2p$. Sean $T_1 = T$, T definidos como en definición 2. Usando los momentos $s_0, s_1, \ldots, s_{2p}$ construimos las matrices

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^{p}, \\
v_1 &= column[1, 0, \ldots, 0], \\
u_1 &= column[0, -s_0, \ldots, -s_{p-1}], \\
R_{T_1}(z) &= (I - zT_1)^{-1}, \\
\tilde{K}_1 &= \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^{p-1}, \\
\tilde{K}_3 &= \{s_{j+k+2}\}_{j,k=0}^{p-1}, \\
K_2 &= \theta\tilde{K}_1 - \tilde{K}_3, \\
T_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{p}, \\
v_2 &= column[1, 0, \ldots, 0], \\
R_{T_2}(z) &= (I - zT_2)^{-1}, \\
\tilde{u}_1 &= column[-s_0, -s_1, \ldots, -s_{p-1}], \\
\tilde{u}_3 &= [-s_1, -s_2, \ldots, -s_p], \\
u_2 &= (a + b)\tilde{u}_1 - \tilde{u}_3.
\end{aligned}
$$

Aquí $u_1, v_1 \in \mathbb{R}^{p+1}$, $u_2, v_2 \in \mathbb{R}^p$. Además intruducimos dos funciones holomórfincas

$$
\begin{aligned}
\tilde{s}_1(z) &= s(z), \\
\tilde{s}_2(z) &= (\theta - z) z s(z) - s_0 z, \; z \in \mathbb{C} \setminus [0,\theta]. \quad (10)
\end{aligned}
$$

Donde $s(z) \in \mathcal{L}([0,\theta], \{s_j\}_{j=0}^{2p})$.
Definición 4. La función s es una solución de un sistema de desigualdades (Desigualdad Matricial Fundamental, FMI) de V.P. Potapov , si s satisface las siguientes propiedades:
(i) s es holomórfica en $\mathbb{C} \setminus [0,\theta]$.
(ii) Para $r \in \{1, 2\}$ se cumple la desigualdad

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_{T_r}(z)\,[\,v_r\tilde{s}_r(z) - u_r\,] \\ \hline * & \{\tilde{s}_r(z) - \tilde{s}_r^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array} \right] \geq 0. \qquad (FMI)$$

Donde K_r, T_r, u_r, $s_r(z)$ y v_r estan definidos como en (8) y (9). $*$ significa la conjugada compleja de $R_{T_r}(z)\,[\,v\tilde{s}_r(z) - u_r\,]$.

Teorema 1. *La función s es una transformada de $\sigma \in \mathcal{M}([a,b]; \{s_j\}_{j=0}^{n})$, es decir $s \in \mathcal{L}([0,\theta], \{s_j\}_{j=0}^{n})$ si y sólo si s es una solución del sistema (FMI) de Potapov.*
Para $\theta > \theta_{\text{mín}}$ las matrices K_1, K_2 son positivamente definidas, es decir $\det K_r \neq 0$, $r = \{1, 2\}$.
Sea $U = \{U_{ij}\}_{i,j}^{2}$ la matriz resolvente del PMF. Donde en el caso impar,

$$\begin{aligned} U_{11}(z) &:= 1 - zu_2^* R_{T^*}(z)K_2^{-1}v, \\ U_{12}(z) &:= u_1^* R_{T^*}(z)K_1^{-1}u_1, \\ U_{21}(z) &:= -(\theta - z)zv^* R_{T^*}(z)K_2^{-1}v, \\ U_{22}(z) &:= 1 + zv^* R_{T^*}(z)K_1^{-1}u_1. \end{aligned}$$

En el caso par,

$$\begin{aligned} U_{11}(z) &:= 1 - zu_1^* R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1, \\ U_{12}(z) &:= M - zu_1^* R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1 M \\ &\quad + zu_1^* R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}u_1, \\ U_{21}(z) &:= -zv_1^* R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1, \\ U_{22}(z) &:= 1 - zv_1^* R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}v_1 M \\ &\quad + zv_1^* R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}u_1. \end{aligned}$$

$M = (1 + \theta[u_1^* K_1^{-1}v_1 - u_2 K_2^{-1}v_2])(\theta v_1^* K_1^{-1}v_1)^{-1}$. Entonces,

Teorema 2. La transformación lineal fraccionaria $s := \frac{U_{11} + w\,U_{12}}{U_{21} + w\,U_{22}}$ realiza una relación bijectiva entre:

a) (Caso impar), el parámetro $w \in \mathcal{R}[0, \theta] \cup \infty$ y la transformada de Stieltjes $s \in \mathcal{R}([0, \theta], (s_j)_{j=0}^{2n+1})$.

b)(Caso par), el parámetro $w \in \mathcal{S}[0, \theta] \cup \infty$ y la transformada de Stieltjes $s \in \mathcal{R}([0, \theta], (s_j)_{j=0}^{2n})$.

$w \in R[0, \theta] \Leftrightarrow w = \int_0^\theta (t - z)^{-1}\sigma(dt)$,

$w \in S[0, \theta] \Leftrightarrow w = (b - z)\int_0^\theta (t - z)^{-1}\sigma(dt)$,

$\sigma \in \mathcal{M}[0, \theta]$.

Solución del problema P1

El conjunto de controles $U = \{u : u(t) = 2f(t) - 1,\ t \in [0, \theta]\}$ es la solución del problema SNC. Donde,

$f(t) = -\lim_{\epsilon \to +0} \arg\left((t + i\epsilon)s(t + i\epsilon)\right)$, (13)

Ejemplo. Sea $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $|u| \leq 1$, con la posición inicial $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 1$. Para $\theta = 3$ las matrices $K_1 > 0$, $K_2 > 0$. De acuerdo al teorema 2, calculamos $U_{11} = 1 - \frac{12}{13}z$, $U_{12} = \frac{23}{15} - \frac{4}{5}z$, $U_{21} = \frac{1}{13}z(-31 + 12z)$, $U_{22} = 1 - \frac{41}{15}z - \frac{4}{5}z^2$. Establecemos $w = (\theta - z)\int_0^\theta (t - z)^{-1}dt$, aquí $\sigma(t) = t$. El control buscado $u(t) = 2f(t) - 1$ donde,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(h(t) - \frac{1 + (-1)^k}{2}\pi\right), & {\scriptstyle t_k \leq t < t_{k+1}, \atop k=0,..,3,} \\ \frac{1}{\pi}(h(t) - \pi), & t_4 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

$h(t) = \arctan \frac{38025\pi}{g(t)}$,

$g(t) = 194435 + 3t(2704(-7 + 3t) + 75\pi^2(-3 + t)(-31 + 12t)(-13 + 12t)) + \frac{15}{4}\lg\left|\frac{t-3}{t}\right|(-26(-3+2t)(65+144(-3+t)t)+15(-3+t)t(-31+12t)(-13+12t)\lg\left|\frac{t-3}{t}\right|)$.

$t_0 = 0, t_1 = 0{,}0197331, t_2 = 1{,}11521806, t_3 = 2{,}526024, t_4 = 2{,}9091237$.

Bibliografía

[1] N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem*, Oliver and Boyd, 1965

[2] L. E. Elsgoltz: Calculus of Variations, Pergamon Press Ltd., 1962

[3] A. V. Efimov, V. P. Potapov, *J–expansive matrix-valued functions and their role in the analytical theory of electrical circuits*, Russian Math. Surveys, **28** (1973), 69–140.

[4] F. R. Gantmacher M. G. Krein, *Oscillation Matrices and Small Oscillations of Mechanical Systems* (Russian), Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1941.

[5] I. V. Kovalishina, *Analytic theory of a class of interpolation problems* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Volume 47, Issue 3, (1983), 455-497.

[6] I.M. Gelfand and S.V. Fomin: Calculus of Variations, Dover Publ., 2000.

[7] L. Hocking, Optimal Control: an introduction to the theory with applications, Claredon Press, OXford, 1991.

[8] V.I. Korobov, G.M. Sklyar: *Time optimality and the power moment problem*, Mat. Sb. 134 (176) (1987), 186–207;

[9] N.N. Krasovskii, *Control of dynamical systems.* Nauka, Moscow, 1985.

[10] M.G. Krein , A.A. Nudelman: *The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P.L. Čebyšev and A.A. Markov and their further development.* Translations of Mathematical Monographas, Vol.50. AMS, Providence, A.l., 1977.

[11] E. Lee and L. Markus, Foundations of Optimal Control , Wiley, 1967.

[12] J. Macki and A. Strauss, Introduction to Optimal Control Theory, Springer, 1982.

[13] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanski, R.V. Gamkrelitse and E.F. Mischenko: *The mathematical theory of optimal processes*, Fizmatgiz, Moscow, 1961; English transls., Willey, 1962, and Macmillan, 1964.

[14] Hans Sagan: Introduction to the Calculus of Variations, Dover, 1992.