Escuela de Verano en Matemáticas
PCCM UNAM UMSNH

MODELOS BOOLEANOS-VALUADOS Y PRUEBAS DE CONSISTENCIA RELATIVA
Tarea No. 2
30 de junio de 2015.

Álgebras booleanas

I. ÁLGEBRAS DE ABIERTOS REGULARES
Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto U de X es *abierto regular* si $U = int(cl(U))$. Demuestra que

1. $\emptyset$ y X son abiertos regulares,

2. Si U y V son abiertos regulares entonces $int(cl(X \setminus U)$, $U \cap V$ y $int(cl(U \cup V))$ son abiertos regulares.

Definiendo $RO(\tau)$ como la familia de abiertos regulares de τ, y ordenándola por contención, prueba que ésta es una álgebra booleana completa. Para esto hay que probar que

- si $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos regulares entonces $\bigcap \mathcal{U}$ es abierto regular.
- $int(cl(\bigcup \mathcal{U}))$ es el supremo de $\mathcal{U}$ en $RO(\tau)$.

II. COMPLETACIÓN DE ÁLGEBRAS BOOLEANAS: Unicidad
Demuestra que si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son álgebras booleanas completas, $\mathbb{P}$ es un orden parcial separativo y las funciones $i : \mathbb{P} \to \mathbb{A}$ y $j : \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ son tales que $i(\mathbb{P})$ es denso en $\mathbb{A}$ y $j(\mathbb{P})$ es denso en $\mathbb{B}$, entonces $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son isomorfas.

III. COMPLETACIÓN DE ÁLGEBRAS BOOLEANAS: Existencia
Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial separativo. Denotemos por $N_p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$. Sea τ la topología sobre $\mathbb{P}$ definida de modo tal que N_p es la única vecindad básica de p; es decir, $U \in \tau$ si y sólo si para cada $p \in U$, $N_p \subseteq U$. La función $i : \mathbb{P} \to RO(\tau)$ dada por $i(p) = N_p$ es un homomorfismo inyectivo, e $i(\mathbb{P})$ es denso en $RO(\tau)$, por lo que $RO(\tau)$ es la completación de $\mathbb{P}$.

IV. EJEMPLOS

1. Sea $\mathbb{B}$ el álgebra de subconjuntos finitos y cofinitos de $\mathbb{N}$. Encuentra un subconjunto de $\mathbb{B}$ que no tenga supremo. ¿Quién es la completación de $\mathbb{B}$?

2. Un átomo en una álgebra booleana $\mathbb{B}$ es un elemento $a \neq 0$ de $\mathbb{B}$ tal que no existe $c \in \mathbb{B}$ tal que $0 < c < a$. Si $\mathbb{A}$ es la completación de $\mathbb{B}$ y b es un átomo en $\mathbb{B}$ entonces $i(b)$ es un átomo en $\mathbb{A}$.

3. Si $\mathbb{B}$ no tiene átomos entonces su completación tampoco los tiene.