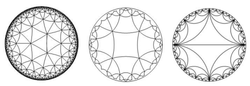
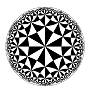
Ejercicios I

- Existe el n-ágono regular hiperbólico con ángulo $2\pi/m$ si y sólo si $(m-2)(n-2) > 4$.



- $z \mapsto e^{i\theta} z : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, con $\theta \in \mathbb{R}$, es isometría de $\int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt$.



- $z \mapsto \lambda z : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es isometría de $\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$.
- $z \mapsto z + a : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, con $a \in \mathbb{R}$, es isometría de $\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$.
- Semirectas verticales en $\mathbb{S}$ son geodésicas de $\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$.
- Cualesquiera 2 semirectas verticales en $\mathbb{S}$ se acercan arbitrariamente mientras se escapan hacia arriba.

Ejercicios II

- $z \mapsto 1/z : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ preserva ángulos y círculos (incluidos los de radio infinito).
- $\mathbb{S}$ es homogéneo. También todas las rectas son congruentes.
- $\sigma(z) = \frac{2}{z-i} - i : \mathbb{D} \to \mathbb{S}$ es isometría entre $\int_\gamma \frac{2\sqrt{dx^2+dy^2}}{1-(x^2+y^2)}$ y $\int_\gamma \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$.
- Considerar un pentágono hiperbólico con un vértice ideal y lado opuesto a dicho vértice de longitud hiperbólica α. Suponer que los ángulos interiores en los vértices adyacentes al vértice ideal suman 180°, y que los otros dos son de 90°. Entonces los ángulos que suman 180° también son iguales a 90° y el pentágono está totalmente determinado por α.

Ejercicios III

- $\sigma(x,y) = \frac{a}{2\pi}\left(\cos\frac{2\pi x}{a}, \sin\frac{2\pi x}{a}, \frac{2\pi y}{a}\right) : \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{C}_a \subset \mathbb{R}^3$ es inmersión (isometría local).
- Geodésicas cerradas simples en $\mathfrak{T}_i$ con pendientes a/b y c/d tienen $|ad - bc|$ puntos de intersección.
- Rectas con pendiente irracional dan geodésicas simples infinitas en $\mathfrak{T}_i$.
- Unir mediante geodésicas de $\mathbb{S}$, todas las parejas de racionales $a/b, c/d \in \partial\mathbb{S}_\infty$ tales que $|ad - bc| = 1$. Mostrar que esto determina una triangulación de $\mathbb{S}$ cuyo grupo de simetrías son de la forma $z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ donde $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$.
- Todo los triángulos ideales hiperbólicos son congruentes y tienen área π (el elemento de área en $\mathbb{S}$ es $\frac{dx\,dy}{y^2}$).
- Calcular el número de jugadores necesarios para jugar un juego de beisball (el elemento de área en $\mathbb{D}$ es $4\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2}$).
- Al pegar lados opuestos de hexágono queda toro plano.

Distorsión exponencial de distancia Euclideana cerca de frontera

d^H y d denotan las distancias geodésicas hiperbólica y Euclideana en $\mathbb{D}$, respectivamente.

Observación

Sean $P, Q \in \mathbb{D}$. Suponer $d^H(P,Q) = L$ y $d^H(P,0) > K > L$. Entonces $d(P,Q) < (2Le^L)e^{-K}$.

Dem. $d^H(Q,0) > K - L \Rightarrow d(Q,0) > \tanh\left(\frac{K-L}{2}\right)$. Además,

$$d(P,Q) < \left(\frac{1-\tanh^2(\frac{K-L}{2})}{2}\right) d^H(P,Q) < \frac{L}{2}\frac{1}{\cosh^2(\frac{K-L}{2})} < \frac{2L}{e^{K-L}}.$$

Una bibliografía

1. **Jesús Muciño-Raymundo**, *Geometría Hiperbólica, una Introducción usando Cálculo y Variable Compleja*, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones, 21 (1998) 165–196.
2. **Ratcliffe**, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 149, Springer-Verlag, 1995.
3. **William Thurston**, *Three-dimensional Geometry and Topology*, Vol 1. Editado por Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, 1997.
4. **Alberto Verjovsky**, *Introducción a la Geometría y las Variedades Hiperbólicas*, Departamento de Matemáticas, CINVESTAV, IPN, 1982.