APORTACIONES MATEMÁTICAS
Memorias **37** (2007) 3–9
Artículo de Investigación

EL LEMA DEL CONJUNTO LIBRE Y DEFINIBILIDAD

JOSÉ ALFREDO AMOR MONTAÑO, MICHAEL HRUŠÁK Y DAVID MEZA ALCÁNTARA

ABSTRACT. Various definable versions of the Free Set Lemma are considered here. We investigate when a function $f: X \to [X]^\omega$ defined on a Polish space X admits a perfect free set. It is shown that a perfect free set exists whenever f is "reasonably" definable. In particular, assuming the Axiom of Determinacy a perfect free set exists for every such f.

RESUMEN. Varias versiones definibles del lema del conjunto libre estan consideradas aqui. Investigamos cuándo una función $f: X \to [X]^\omega$ definida en un espacio polaco X admite un conjunto libre perfecto. Demostramos que un conjunto libre perfecto existe siempre que f es "razonablemente" definible. En particular, suponiendo el Axioma de Determinación existe un conjunto libre perfecto para cada tal f.

1. INTRODUCCIÓN

Dado un conjunto A y $f: A \to \mathcal{P}(A)$ se dice que un subconjunto B de A es *libre respecto a* f si para cualesquiera $x \neq y \in B$, $x \notin f(y)$.

Note que la definición anterior es simétrica, es decir, B es libre respecto a f, si para cualesquiera $x \neq y \in B$, $x \notin f(y)$ y $y \notin f(x)$.

Teorema 1.1 (Lema del conjunto libre (FSL); Hajnal, 1961)**.** *Sean κ un cardinal infinito y λ un cardinal menor que κ. Sea A un conjunto de cardinalidad κ y $f: A \to \mathcal{P}(A)$ tal que para cada $a \in A$, $|f(a)| < \lambda$. Entonces A tiene un subconjunto B de cardinalidad κ que es libre respecto a f.*

La formulación original del lema del conjunto libre apareció como una conjetura de S. Ruziewicz en [5]. W. Sierpiński y D. Lázár demostraron el lema en el caso $\lambda = \aleph_0$ y κ de la forma 2^μ o de la forma $\aleph_{\alpha+1}$. Después, S. Piccard demostró el lema para κ regular o de cofinalidad numerable. G. Fodor lo demostró para κ con cofinalidad mayor que λ. P. Erdös probó el lema en su versión general, pero usando la hipótesis generalizada del continuo. Finalmente, A. Hajnal en 1961 [2] demostró la versión general en ZFC.

Ésta es la versión final del artículo. (This is the final form of the paper).

El segundo autor fue apoyado por los proyectos 46337 del CONACyT y 106705 del PAPIIT. El tercer autor fue apoyado por la beca 180319 del CONACyT.

Una gráfica (orientada) sobre un conjunto dado A, se define como una familia de parejas ordenadas en $A \times A$. Si G es una gráfica sobre A, se dice que un conjunto $B \subseteq A$ es *libre para* G, si $B^2 \cap G \subseteq \Delta$, donde Δ es la relación diagonal, es decir, $\Delta = \{(x, y) : x = y\}$. El lema del conjunto libre puede ser enunciado en el lenguaje de la teoría de gráficas de la siguiente manera:

Lema 1.2. *Sean κ un cardinal infinito y $\lambda < \kappa$. Si $|A| = \kappa$ y G es una gráfica sobre A de modo tal que para cada $a \in A$, $|\{x \in A : (a, x) \in G\}| < \lambda$ entonces existe un subconjunto B de A con $|B| = \kappa$ y libre para G.*

En un sentido informal, la versión gráfica del lema del conjunto libre sugiere que las gráficas que en cierto sentido son "pequeñas" tienen conjuntos libres que en algún sentido son "grandes". Específicamente, en el enunciado antes expuesto, el sentido de *grande* y *pequeño* es en ambos casos, la cardinalidad.

Motivados por el artículo de Chris Freiling [1], hemos estudiado el lema del conjunto libre en el contexto de los espacios polacos y las funciones definibles, donde abundan nociones de grande y pequeño, por ejemplo, pequeños son los conjuntos magros, los de medida cero, los numerables; y grandes son los conjuntos no numerables, los perfectos, o los densos de tipo G_δ.

En el artículo de Freiling aparece el siguiente principio combinatorio, llamado $A_{\aleph_0}$:

$$(\forall f \colon \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\aleph_0})(\exists\, x_1, x_2)(x_2 \notin f(x_1) \wedge x_1 \notin f(x_2)),$$

el cual es una consecuencia inmediata del lema del conjunto libre, suponiendo la negación de la hipótesis del continuo de Cantor (CH). De hecho, $A_{\aleph_0}$ es equivalente a $\neg$CH. Freiling afirma que este principio es *intuitivamente claro* y su argumento es el siguiente: Es intuitivamente claro que al lanzar un dardo sobre la recta real, es *improbable* que éste caiga sobre un elemento de un conjunto numerable previamente dado. Dados una función $f \colon \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\aleph_0}$ y $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, puede identificarse a $f(x_1)$ con el conjunto numerable dado, y x_2 con el dardo. Dado que no es posible precisar el orden con que se dan el dardo y el conjunto numerable, se define el principio $A_{\aleph_0}$ de modo simétrico. Si bien, no es posible argumentar matemáticamente la *claridad intuitiva* de $A_{\aleph_0}$, tampoco es posible *definir* un contraejemplo a éste principio. Y esto es justamente el motivo por el que estudiamos las variaciones del lema del conjunto libre en el contexto de las funciones y los conjuntos definibles.

Para espacios polacos, el lema del conjunto libre en su versión gráfica, tiene asociada de manera natural la complejidad de una gráfica, vista como subconjunto del producto $X \times X$ (X espacio polaco). Siguiendo la idea gráfica de **FSL**, enunciamos los siguientes principios:

1. **Lema del conjunto libre para gráficas magras (FSM).**
   Para cada $A \subseteq \mathbb{R}^2$ magro existe un conjunto perfecto $P \subseteq \mathbb{R}$ libre para A.

2. **Lema del conjunto libre para gráficas con secciones verticales contables (FSC).**
Para cada $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Borel, si para todo $x \in \mathbb{R}$ la familia $\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$ es contable entonces existe un conjunto perfecto $P \subseteq \mathbb{R}$ libre para A.

En cambio, la versión original de **FSL** requiere encontrar una topología adecuada para la familia de subconjuntos de X. Al menos para la familia de subconjuntos numerables de X se puede utilizar a X^ω (con la topología producto) para simular a los subconjuntos numerables de X. Sea $f: X \to X^\omega$ Decimos que $B \subseteq X$ es *libre para f* si para cualesquiera $x, y \in B$, $x \notin ran(f(y)) \wedge y \notin ran(f(x))$. Simulando la versión original del lema del conjunto libre, enunciamos:

3. **Lema del conjunto libre Borel (FSB).**
Para cada función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ Borel, existe un conjunto perfecto P libre respecto a f.

Otros trabajos que se han publicado con temas relacionados son el artículo de M. Laczkovich [4], en el que se muestran resultados del tipo gráfico respecto a conjuntos medibles; y el artículo de O. Spinas [6], en el que trabaja con versiones de **FSL** respecto a subconjuntos σ-compactos de un espacio polaco.

2. El lema del conjunto libre para graficas magras (**FSM**)

El lema del conjunto libre para gráficas magras es una formulación de un caso particular del teorema de Mycielski y Kuratowski, que se puede consultar en [3]. Demostraremos **FSM** en una versión un poco más general que la planteada en la sección anterior.

Teorema 2.1 (FSM). *Sea X un espacio polaco perfecto. Para cada A subconjunto magro de X^2, existe un subconjunto perfecto P de X tal que $P^2 \cap A \subseteq \Delta$.*

Demostración. Sea $\{F_n : n \in \omega\}$ una familia numerable creciente de subconjuntos cerrados nunca densos de X^2, tal que $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Se construye una familia $\{I_s : s \in 2^{<\omega}\}$ de modo que:

(a) $I_\emptyset = X$
(b) Si $n > 0$ y $s \in 2^n$ entonces I_s es una bola cerrada con diámetro menor que $\frac{1}{n}$.
(c) Si $s, t \in 2^{<\omega}$ y $s \subseteq t$ entonces $I_t \subseteq I_s$.
(d) Si $s \in 2^{<\omega}$ entonces $I_{s^\frown 0} \cap I_{s^\frown 1} = \emptyset$.
(e) Si $s, t \in 2^n$ y $s \neq t$ entonces $(I_s \times I_t) \cap F_n = \emptyset = (I_t \times I_s) \cap F_n$.

Mostraremos en primer lugar que es posible hacer tal construcción. Supongamos que para toda $s \in 2^n$, la bola I_s ha sido construida. Si $\{s_k : k < 2^n\}$ es una enumeración del conjunto 2^n, entonces definimos las bolas cerradas ajenas $I_{s_k^\frown 0}$ e $I_{s_k^\frown 1}$ por refinamientos sucesivos, de modo tal que

(1) $\mathrm{diam}(I_{s_k\frown 0})$ y $\mathrm{diam}(I_{s_k\frown 1})$ son menores que $\frac{1}{n+1}$.
(2) $I_{s_k\frown 0} \times I_{s_k\frown 1} \cap F_n = \emptyset = I_{s_k\frown 1} \times I_{s_k\frown 0} \cap F_n$
(3) Si $l < k$ y $b, b' \in 2$ entonces $I_{s_k\frown b} \times I_{s_l\frown b'} \cap F_n = I_{s_l\frown b'} \times I_{s_k\frown b} \cap F_n = \emptyset$.

Siempre es posible encontrar tales $I_{s_k\frown 0}$ e $I_{s_k\frown 1}$ puesto que F_n es nunca denso, y siempre es posible reducir a las bolas $I_{s_l\frown 0}$ e $I_{s_l\frown 1}$ con $l < k$ de modo tal que los productos $I_{s_k\frown b} \times I_{s_l\frown b'}$ y $I_{s_l\frown b'} \times I_{s_k\frown b'}$ eviten a F_n.

Ahora bien, si $P = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup\{I_s : s \in 2^n\}$, entonces P es perfecto. Además, si $x \neq y$ y $(x, y) \in P^2$ entonces existen $n \in \omega$ y $s \neq t \in 2^n$ tales que $x \in I_s$, $y \in I_t$, y $I_s \times I_t \cap F_n = \emptyset$. Pero más aún, para toda $m \geq n$ si $s', t' \in \omega^m$, son extensiones de s y t respectivamente, con $x \in I_{s'}$ y $y \in I_{t'}$, entonces $I_{s'} \times I_{t'} \cap F_m = \emptyset$. Esto demuestra que para todo $n \in \omega$, $(x, y) \notin F_n$, lo cual implica que $P^2 \cap A \subseteq \Delta$. □

El siguiente teorema es un resultado análogo al anterior, pero para gráficas de medida cero. Es una sencilla consecuencia del siguiente lema que aparece como teorema 3 en [4]. Denotaremos por λ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$; si $H \subseteq \mathbb{R}^2$ y $x \in \mathbb{R}$ entonces H_x denota al conjunto $\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in H\}$; y si $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $d(A, x)$ es la *densidad inferior* de A en x, definida por

$$d(A, x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-h, x+h))}{2h}.$$

Lema 2.2 (Laczkovich, 2002)**.** *Si $H \subseteq \mathbb{R}^2$ es medible y*

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R} : d(H_x, x) > \frac{1}{2}\right\}\right) > 0$$

entonces existe un conjunto perfecto P tal que $P^2 \subseteq H \cup \Delta$.

Teorema 2.3. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene medida cero entonces existe $P \subseteq \mathbb{R}$ perfecto y libre para A.*

Demostración. Si $\lambda(A) = 0$ entonces para cada $x \in \mathbb{R}$, $d((\mathbb{R}^2 \setminus A)_x, x) = 1$, de modo que existe un perfecto P tal que $P^2 \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus A) \cup \Delta$, el cual cumple lo requerido. □

El siguiente resultado se sigue inmediatamente del anterior y del teorema de Fubini.

Corolario 2.4. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es Lebesgue medible y tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, A_x tiene medida cero, entonces existe $P \subseteq \mathbb{R}$ perfecto y libre para A.*

3. Lema del conjunto libre para gráficas con secciones verticales contables (FSC)

El siguiente teorema, que aparece en [3], será utilizado para demostrar **FSC**. Denotaremos con $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ al ideal de subconjuntos magros de $\mathbb{R}$ y por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ al ideal de subconjuntos magros de $\mathbb{R}^2$.

La familia $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R})$ queda definida por:

$$A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}) \text{ si y sólo si } \{r \in \mathbb{R} : A_r \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

para $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Teorema 3.1 (Kuratowski, Ulam)**.** *Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es Borel, entonces*

$$A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}) \textit{ si y sólo si } A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$$

Dos consecuencias inmediatas del teorema de Kuratowski-Ulam y de **FSM** son los siguientes corolarios.

Corolario 3.2. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es Borel y para cada $x \in \mathbb{R}$ el conjunto A_x es magro, entonces existe un conjunto perfecto $P \subseteq \mathbb{R}$ tal que $P^2 \cap A \subseteq \Delta$.*

Corolario 3.3 (FSC)**.** *Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es Borel y para todo $x \in \mathbb{R}$ la familia $\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$ es contable entonces existe un conjunto perfecto $P \subseteq \mathbb{R}$ tal que $P^2 \cap A \subseteq \Delta$.*

4. Lema del conjunto libre Borel (FSB)

Empezaremos por demostrar **FSB** para funciones continuas.

Teorema 4.1. *Sea X un espacio polaco perfecto. Para cada función* continua $f : X \to X^\omega$*, existe un conjunto perfecto $P \subseteq X$ tal que para cualesquiera $p \neq q \in P$, $p \notin ran(f(q))$ y $q \notin ran(f(p))$.*

Demostración. Sea $f : X \to X^\omega$ continua. Sea $A = \{(x, y) : y \in ran(f(x))\}$. Definiendo, para cada $n \in \omega$, una función $f_n : X \to X$ dada por

$$f_n(x) = f(x)(n)$$

tenemos que para cada $n \in \omega$, f_n es continua. En consecuencia, la gráfica de f_n es un subespacio cerrado de X^2, que por cierto es nunca denso y $A = \bigcup_{n\in\omega} graf(f_n)$. De este modo, por **FSM** (teorema 2.1) existe un conjunto perfecto $P \subseteq X$ tal que $P^2 \cap A \subseteq \Delta$. Esto significa que si $p \neq q \in P$ entonces (p, q) y (q, p) no pertenecen a A, es decir, $q \notin ran(f(p))$ y $p \notin ran(f(q))$. □

Para todo espacio polaco X, definamos la clase

$$\mathcal{C}_X = \{f \in (X^\omega)^X : \exists\, P \subseteq X \text{ perfecto tal que } f \restriction P \text{ es continua}\}.$$

Observación 4.2. Para cada $f \in \mathcal{C}_X$ existe un perfecto $P \subseteq X$ tal que para cualesquiera $p \neq q \in P$, $p \notin ran(f(q))$ y $q \notin ran(f(p))$.

Esta observación queda demostrada por la aplicación del teorema 4.1 a la restricción donde f es continua.

El siguiente lema es un resultado bien conocido.

Lema 4.3. *Sean K_1, K_2 espacios métricos, y f una función de K_1 en K_2. Si la gráfica de f (como subespacio de $K_1 \times K_2$) es compacta entonces f es continua.*

Una consecuencia del lema anterior y de la observación previa a éste, es el siguiente resultado.

Teorema 4.4. *Sean X un espacio polaco y $f : X \to X^\omega$. Si la gráfica de f contiene un conjunto perfecto, entonces existe un subconjunto perfecto P de X tal que para cualesquiera $p \neq q \in P$, $p \notin ran(f(q))$ y $q \notin ran(f(p))$.*

Demostración. Sea P' subconjunto perfecto compacto de la gráfica de f. Sea P'' la proyección de P' sobre X. La gráfica de $f \restriction P''$ es P', que es un conjunto compacto. Por el lema 4.3, f es continua, de modo que $f \in \mathcal{C}_X$, y en consecuencia, existe el perfecto P buscado. $\square$

En este sentido, observe que las demostraciones aqui expuestas hacen uso (a lo más) del axioma de elección numerable, el cual es consecuencia del axioma de elecciones dependientes. Así pues, bajo el axioma de determinación (**AD**), tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.5 (AD)**.** *Sea X un espacio polaco*

1. *Si $f : X \to X^\omega$ entonces existe $P \subseteq X$ perfecto y libre respecto a f.*
2. *Si $f : X \to [X]^\omega$ entonces existe $P \subseteq X$ perfecto y libre respecto a f.*

Demostración. (1) En efecto, bajo **AD**, la gráfica de f tiene la propiedad del conjunto perfecto, es decir, contiene un conjunto perfecto P', y en consecuencia existe un perfecto $P \subseteq X$ libre respecto a f.

(2) Definamos $A = \{(x, y) : y \in f(x)\}$, el cual tiene secciones verticales contables. Por **FSC** (3.3), existe un subconjunto perfecto P de X tal que $P^2 \cap A \subseteq \Delta$. De este modo, para cualesquiera $p \neq q \in P$, $p \notin f(q)$. $\square$

Ahora bien, generalizaremos el teorema 4.1 hasta las funciones Lebesgue-medibles, haciendo uso del siguiente teorema, que aparece en [3].

Teorema 4.6 (Teorema de Lusin sobre funciones medibles)**.** *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ es Lebesgue-medible y $\epsilon > 0$ entonces existe una función continua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ tal que $\mu(\{x : h(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$.*

Corolario 4.7. *Para cada función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ Lebesgue-medible, existe un conjunto perfecto $P \subseteq \mathbb{R}$ libre respecto a f. En particular, lo mismo vale si f es Borel-medible.*

Demostración. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ continua y $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado de medida positiva tal que $f \restriction F = g \restriction F$. F es incontable, y en consecuencia, contiene un conjunto perfecto C, lo cual prueba que $f \in \mathcal{C}_\mathbb{R}$. $\square$

5. Conclusiones

Como se puede apreciar en las demostraciones de los principios **FSM**, **FSB** y **FSC**, las versiones efectivas de el lema del conjunto libre nunca hacen uso de la hipótesis del continuo o de su negación. Esto muestra que el argumento de Freiling contra la hipótesis del continuo está basada en la aplicación de las "leyes" de la probabilidad fuera de contexto. Esto es, hace una analogía de los procesos físicos y probabilísticos con funciones que podrían estar muy lejos de representar fenómenos de esta naturaleza. Es decir, razona con argumentos probabilísticos sobre funciones que podrían ni siquiera ser Borel o Lebesgue-medibles. Específicamente, un contraejemplo al principio $A_{\aleph_0}$ debería estar dado por una función cuya existencia es consecuencia de la hipótesis del continuo. Pero además una función con tal cualidad, no se encuentra en las clases de funciones con un mínimo de definibilidad, lo cual es mostrado por nuestros principios. Así que $A_{\aleph_0}$ es verdadero en las funciones definibles, pero generalizar esto es abusar de las nociones probabilísticas elementales.

Referencias

[1] C. Freiling, *Axioms of symmetry: Throwing darts at the real number line.* The Journal of Symbolic Logic **51** (1986), 190–200.

[2] A. Hajnal, *Proof of a conjecture of S. Ruziewicz.* Fundamenta Mathematicae **50** (1961), 123–128.

[3] A. S. Kechris *Classical descriptive set theory.* GTM vol. 156 Springer-Verlag, New York, 1994.

[4] M. Laczkovich, *A Ramsey theorem for measurable sets.* Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 3085–3089.

[5] S. Ruziewicz, *Une généralisation d'un theorème de M. Sierpiński.* Publications Math. de l'Université de Belgrade **5** (1936), 23–27.

[6] O. Spinas, *Ramsey and freeness properties of polish planes.* Proc. London Math. Soc. (3) **82** (2001), 31–63.

(J. A. Amor Montaño) Facultad de Ciencias, UNAM, Circuito Exterior, Cd. Universitaria, 04510 México D.F., MÉXICO

E-mail address: `jaam@hp.fciencias.unam.mx`

(M. Hrušák y D. Meza Alcántara) Instituto de Matemáticas, UNAM–Morelia, Apartado Postal 61-3 (Xangari), 58089 Morelia, Mich., MÉXICO