# El orden de Tukey
# Degustaciones Matemáticas

Osvaldo Guzmán González
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM
oguzman@matmor.unam.mx

Sea $D$ un conjunto no vacío y $\leq$ una relación binaria en $D$. Recordemos que $(D, \leq)$ es un *orden parcial* si $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Además, diremos que $(D, \leq)$ es *dirijido* si para todos $a, b \in D$ existe $d \in D$ tal que $a, b \leq d$.

Los órdenes parciales dirijidos son fundamentales en el estudio de convergencia en espacios topológicos (ver [6], o [4]). El *orden de Tukey* es una herramienta fundamental para el estudio y clasificación de órdenes dirijidos. De manera informal, el orden de Tukey clasifica a los ordenes parciales de acuerdo a su "estructura cofinal" o más informalmente en "como se ven al final". Necesitaremos unas definiciones previas antes de dar la definición formal de este orden. Empezaremos con la definición de ideal, la cual es de gran importancia en la combinatoria infinita:

**Definición 1** *Sea $X$ un conjunto e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ [1]. Decimos que $\mathcal{I}$* es un ideal (en $X$) *si cumple las siguientes propiedades:*

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$.*
3. *Si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.*

Podemos pensar que un ideal es una "noción de subconjuntos pequeños de $X$". Es decir, pensamos que todo elemento en un ideal es de alguna manera "pequeño" según algún criterio en el que estemos interesados. Pensado de esta manera, la definición de ideal es bastante natural:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$. *(El vacío es pequeño).*
2. Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{I}$. *(Si $A$ es pequeño y contiene a $B$, entonces $B$ también es pequeño).*

[1] Por $\mathcal{P}(X)$ denotamos la *potencia de $X$*, es decir, la colección de todos los subconjuntos de $X$.

3. Si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$. *(Los elementos de $\mathcal{I}$ son tan pequeños, que por más que se unan entre ellos siguen siendo pequeños).*

En la definición de ideal, frecuentemente también se pide que $X \notin \mathcal{I}$ *(es decir, el total no es pequeño)*, pero por razones técnicas, no es conveniente en este momento. Dado $\mathcal{I}$ un ideal en $X$, definimos $\mathcal{I}^{+} = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$. Es decir, $\mathcal{I}^{+}$ es la colección de los subconjuntos que *no son pequeños*. Los ideales se pueden comparar mediante el *orden de Katětov*:

**Definición 2** *Sean $X$ y $Y$ dos conjuntos, $\mathcal{I}$ un ideal en $X$ y $\mathcal{J}$ un ideal en $Y$.*

1. *Sea $f : X \longrightarrow Y$. Decimos que $f$* es una función de Katětov de $(X, \mathcal{I})$ a $(Y, \mathcal{J})$ *si:*

   $$\text{Para todo } A \subseteq Y, \text{ si } A \in \mathcal{J} \text{ entonces } f^{-1}(A) \in \mathcal{I}$$

2. *Decimos que $\mathcal{J}$* esta Katětov abajo de $\mathcal{I}$ *(denotado por $\mathcal{J} \leq_{K} \mathcal{I}$) si existe una función de Katětov de $(X, \mathcal{I})$ a $(Y, \mathcal{J})$.*

3. *Decimos que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son* Katětov equivalentes *si $\mathcal{J} \leq_{K} \mathcal{I}$ y $\mathcal{I} \leq_{K} \mathcal{J}$.*

Notemos que la definición de función de Katětov es sintacticamente igual a la definición de función continua. Recordemos que si $(X, \tau)$ y $(Y, \sigma)$ son dos espacios topológicos, decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua de $(X, \tau)$ a $(Y, \sigma)$ si para todo $A \subseteq Y$, si $A \in \sigma$ entonces $f^{-1}(A) \in \tau$. En ambos casos tenemos una colección distingida de subconjuntos de $Y$ (abiertos en el caso de funciones continuas y los elementos del ideal para funciones de Katětov) y pedimos que la preimagen de un subconjunto distingido de $Y$ sea un subconjunto distinguido de $X$. Para aprender más sobre el orden de Katětov, el lector puede consultar [3], [2] y [1]. El orden de Katětov es muy importante en el estudio de familias $\mathsf{MAD}$, ultrafiltros, ideales Borelianos y en forcing. Las siguientes propiedades del orden de Katětov se dejan como ejercicio al lector:

**Ejercicio 3** *Sean $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ ideales.*

1. $\mathcal{I} \leq_{K} \mathcal{I}$.

2. *Si $\mathcal{I} \leq_{K} \mathcal{J}$ y $\mathcal{J} \leq_{K} \mathcal{K}$, entonces $\mathcal{I} \leq_{K} \mathcal{K}$.*

3. *Si $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$, entonces $\mathcal{J} \leq_{K} \mathcal{I}$.*

4. *Sean $\mathcal{I}$ ideal en $X$, $\mathcal{J}$ un ideal en $Y$ y $f : X \longrightarrow Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   *(a) $f$ es una función de Katětov de $(X, \mathcal{I})$ a $(Y, \mathcal{J})$.*

   *(b) Para todo $A \subseteq X$, si $A \in \mathcal{I}^{+}$, entonces $f[A] \in \mathcal{J}^{+}$.*

Necesitaremos las siguientes definiciones:

**Definición 4** *Sea $(D, \leq)$ un orden parcial.*

1. *Decimos que $B \subseteq D$ es* acotado *si existe $d \in D$ tal que $b \leq d$ para todo $b \in B$,*
2. *Decimos que $C \subseteq D$ es* cofinal *si para todo $d \in D$ existe $c \in C$ tal que $d \leq c$.*
3. *Definimos $\mathsf{bnd}(D) = \{B \subseteq D \mid B \text{ es acotado}\}$.*
4. *Definimos $\mathsf{ncf}(D) = \{X \subseteq D \mid X \text{ no es cofinal}\}$.*

En el caso de que $(D, \leq)$ sea dirijido, es fácil probar que $\mathsf{bnd}(D)$ y $\mathsf{ncf}(D)$ son ideales en $D$. El orden de Tukey compara la estructura del ideal de los no cofinales en órdenes dirijidos. Finalmente, podemos dar la definición principal de estas notas:

**Definición 5** *Sean $(D, \leq_D)$ y $(F, \leq_F)$ órdenes dirijidos.*

1. *Decimos que $(D, \leq_D)$ esta* Tukey abajo de $(F, \leq_F)$ *(denotado por $(D, \leq_D) \leq_T (F, \leq_F)$ o simplemente $D \leq_T F$) si $(D, \mathsf{ncf}(D)) \leq_K (E, \mathsf{ncf}(E))$.*
2. *Decimos que $(D, \leq_D)$ y $(F, \leq_F)$ son* Tukey equivalentes *(denotado por $(D, \leq_D) =_T (F, \leq_F)$ o $D =_T F$) si $(D, \mathsf{ncf}(D)) =_K (E, \mathsf{ncf}(E))$.*

Un aspecto interesante del orden de Tukey es que también podemos definirlo usando el ideal de los subconjuntos acotados (la mayoría de las demostraciones mencionadas en esta nota pueden consultarse en [5]).

**Proposición 6** *Sean $(D, \leq_D)$ y $(F, \leq_F)$ órdenes dirijidos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$D \leq_T F$.*
2. *$(D, \mathsf{ncf}(D)) \leq_K (E, \mathsf{ncf}(E))$.*
3. *$(E, \mathsf{bnd}(E)) \leq_K (D, \mathsf{bnd}(D))$.*

La equivalencia de Tukey tiene una reformulación interesante:

**Proposición 7** *Sean $(D, \leq_D)$ y $(F, \leq_F)$ órdenes dirijidos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$D =_T F$.*

2. *Existe $(K, \leq_K)$ un orden parcial dirijido y $D'$, $F'$ subconjuntos cofinales de $K$ tal que $D$ es isomorfo a $D'$ y $F$ es isomorfo a $F'$.*

Es decir, $D$ y $F$ son Tukey equivalentes si ambos pueden coexistir como subconjuntos cofinales de un mismo orden parcial dirijido. Ahora estamos interesados en clasificar los órdenes parciales dirijidos bajo equivalencia de Tukey. Los dos ejemplos más sencillos de órdenes dirijidos son los siguientes:

1. Denotamos $1 = \{0\}$ con el orden usual (es decir, 1 es el conjunto dirijido que consta de un solo elemento). Es fácil probar que 1 es el mínimo en el orden de Tukey. Además, un orden dirijido $D$ es Tukey equivalente a 1 si y solo si $D$ tiene máximo.

2. Denotamos $\omega$ al conjunto de los números naturales, este es un orden dirijido con su orden usual. Es fácil probar que todo orden dirijido a lo más numerable esta Tukey abajo de $\omega$. Además, un orden dirijido numerable $D$ es Tukey equivalente a $\omega$ si y solo si $D$ no tiene máximo.

De esta manera, bajo equivalencia Tukey, solo existen dos órdenes dirijidos: 1 y $\omega$. Ahora que terminamos la clasificación de los ordenes dirijidos numerables, queremos dar el siguiente paso: clasificar los ordenes dirijidos de tamaño a lo más $\omega_1$ (donde $\omega_1$ denota el primer cardinal no numerable). Al mismo $\omega_1$ lo podemos ver como un conjunto dirijido con su orden usual (que es el único buen orden no numerable tal que todos sus segmentos iniciales son a lo más numerables). Este es un tercer ejemplo de orden dirijido. Claramente $1 \leq_{\mathsf{T}} \omega_1$ y no es difícil probar que $\omega$ y $\omega_1$ son incomparables en el orden de Tukey (aunque $\omega_1$ es más grande que $\omega$ como buen orden, no lo es en el orden de Tukey).

Ya que tenemos a $\omega$ y a $\omega_1$ podemos formar su producto y ordenarlo entrada a entrada. Es fácil ver que $\omega \times \omega_1$ esta Tukey arriba de $\omega$ y $\omega_1$. Más aún, $\omega \times \omega_1$ es el supremo de estos dos.

También podemos considerar a $[\omega_1]^{<\omega} = \{a \subseteq \omega_1 \mid a \text{ es finito}\}$ y ordenarlo con la contensión. Como la unión de dos conjuntos finitos es finita, se sigue que $[\omega_1]^{<\omega}$ es un orden dirijido. Resulta que este es el máximo para los ordenes de tamaño $\omega_1$; si $D$ es un orden dirijido de cardinalidad a lo más $\omega_1$, entonces $D \leq_{\mathsf{T}} [\omega_1]^{<\omega}$. En particular $\omega \times \omega_1 \leq_{\mathsf{T}} [\omega_1]^{<\omega}$ y no son equivalentes.

Así, ya tenemos 5 tipos de Tukey de ordenes de tamaño a lo más $\omega_1$. Podemos resumir la discusión anterior en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & \omega \arrow[dr] & & \\
1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \omega \times \omega_1 \arrow[r] & {[\omega_1]^{<\omega}} \\
 & \omega_1 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

La pregunta obligada es: ¿Existe un orden parcial dirijido de tamaño a lo más $\omega_1$ que no sea equivalente a alguno de estos cinco? o ¿Será que solo existen cinco tipos de ordenes dirijidos (bajo equivalencia Tukey) de tamaño a lo más $\omega_1$? Lo más interesante es que... ¡Esta afirmación es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos! En [5], Stevo Todorcevic demostró estos maravillosos resultrados:

**Teorema 8 (Todorcevic)**

1. *La* Hipótesis Generalizada del Continuo (*CH*) *implica que existen* $2^{\omega_1}$ *ordenes parciales dirijidos de tamaño* $\omega_1$ *que no son Tukey equivalentes.*
2. *El* Proper Forcing Axiom (*PFA) implica que todo orden parcial dirijido de tamaño* $\omega_1$ *es Tukey equivalente a* $1$, $\omega$, $\omega_1$, $\omega \times \omega_1$ *o* $[\omega_1]^{<\omega}$.

CH es la afirmación de que la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es $\omega_1$, mientras que PFA es un axioma de forcing. Este resultado muestra un gran contraste entre los mundos de CH y los de PFA. Mientras bajo CH existen demasiados tipos de Tukey (de ordenes dirijidos de tamaño $\omega_1$) como para poder aspirar a dar una clasificación razonable, bajo PFA solo existen 5 tipos cofinales.

# References


[1] Michael Hrušák. Combinatorics of filters and ideals. In *Set theory and its applications*, volume 533 of *Contemp. Math.*, pages 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.

[2] Michael Hrušák. Katětov order on Borel ideals. *Archive for Mathematical Logic*, 56(7):831–847, Nov 2017.

[3] Michael Hrušák and Salvador García Ferreira. Ordering MAD families a la Katětov. *J. Symbolic Logic*, 68(4):1337–1353, 2003.

[4] John L. Kelley. *General topology.* Graduate Texts in Mathematics, No. 27. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975. Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.].

[5] Stevo Todorčević. Directed sets and cofinal types. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 290(2):711–723, 1985.

[6] Stephen Willard. *General topology.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004. Reprint of the 1970 original [Addison-Wesley, Reading, MA; MR0264581].