Ultrafiltros en las Matemáticas

Osvaldo Guzmán

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM

Parte V: El Teorema de Imposibilidad de Arrow (o como arreglar las elecciones) parte 2

XXIII ESCUELA DE VERANO EN MATEMÁTICAS

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

V es el conjunto de votantes ($|V| \geq 2$) y C el conjunto de candidatos, asumimos es finito y $|C| \geq 3$.

Definición (conjunto decisivo)

Sea Σ una regla y $A \subseteq V$. Decimos que A es Σ-*decisivo* si para toda toda elección E, si $E(v) = p$ para toda $v \in A$, entonces $\Sigma(E) = p$.

Es decir, si todos los de A votan de la misma manera, entonces el resultado de la elección es lo que ellos votaron.

1. Por unanimidad, V es Σ-decisivo.
2. v es dictador en Σ si y solo si $\{v\}$ es Σ-decisivo.

Definición (conjunto quasi decisivo)

Sea Σ una regla y $A \subseteq V$. Decimos que A es Σ-*quasi decisivo* si para toda toda elección E, si $E(v) = p$ para toda $v \in A$ y $E(w) = q$ para toda $w \notin A$, entonces $\Sigma(E) = p$.

Es decir, si todos los de A votan entre ellos de la misma manera y todos los de fuera de A votan entre ellos de la misma manera, entonces el resultado de la elección es lo que votaron los de A

Evidentemente, todo conjunto decisivo es quasi decisivo. Sin embargo, resulta que ambas nociones son equivalentes:

Proposición

Sea Σ una regla y $A \subseteq V$.

A es Σ-decisivo si y solo si A es Σ-quasi decisivo.

Ver Ultrafilters Through Mathematics página 24.

Proposición

Sea Σ una regla y $A \subseteq V$.
A es Σ-decisivo si y solo si A es Σ-quasi decisivo.

Aunque la demostración no es inmediata, es intuitivamente claro. El caso más difícil para que gane la preferencia de A, debe ser en la que todos los del complemento de A se ponen de acuerdo para votar de la misma manera.

En una elección, es posible que un conjunto de votantes se ponga de acuerdo y decidan votar siempre de la misma manera. De ser así, el proceso electoral es equivalente a uno con un menor número de votantes.

Definición (Votación por bloques)

Sea $\mathcal{P}$ una partición de V. Podemos tomar a $\mathcal{P}$ como el conjunto de votantes en un nuevo proceso electoral.

1. Si tenemos una elección E de $(\mathcal{P}, C)$ la podemos levantar una elección $E^{\mathcal{P}}$ de (V, C) donde para cada $v \in V$, definimos $E^{\mathcal{P}}(v) = E(P)$ donde P es el único elemento de $\mathcal{P}$ tal que $v \in P$.

2. Sea Σ una regla de (V, C). Esta induce $\Sigma_{\mathcal{P}}$ una regla de $(\mathcal{P}, C)$ tal que si E es elección, entonces $\Sigma_{\mathcal{P}}(E) = \Sigma(E^{\mathcal{P}})$.

El contenido de las definiciones anteriores es bastante trivial. Las elecciones de $\mathcal{P}$ se corresponden a elecciones de V en la que todos los candidatos de una misma partición votan de la misma manera. Las reglas de V se extienden de manera natural a reglas de $\mathcal{P}$.

Tarea

Demuestra que si Σ es una regla justa en (V, C), entonces $\Sigma_{\mathcal{P}}$ es una regla justa en $(\mathcal{P}, C)$.

Teorema de Arrow para tres votantes

Si $|V| = 3$ y C es finito con $|C| \geq 3$, entonces toda regla de elección justa tiene un dictador.

Ver Ultrafilters Through Mathematics página 25-26.

La Ultrademocracia

Regresemos al problema del principio.

¿Como podemos encontrar reglas justas?

Tenemos una elección E y una preferencia p. Intuitivamente, lo más justo parecería ser que el resultado de la elección E sea p si un "conjunto grandote" de los votantes tiene la preferencia p.

Tenemos una elección E y una preferencia p. Intuitivamente, lo más justo parecería ser que el resultado de la elección E sea p si un "conjunto grandote" de los votantes tiene la preferencia p.

Como hemos visto en el mini curso, ¡esto lo podemos formalizar con ultrafiltros!

Definición

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en V. Definimos la regla $\Sigma_{\mathcal{U}}$ tal que para toda elección E y preferencia p, tenemos que:

$$\boxed{\Sigma_{\mathcal{U}}(E) = p \text{ si } \exists^{\mathcal{U}} v \in V (E(v) = p).}$$

$$\boxed{\Sigma_{\mathcal{U}}(E) = p \text{ si } \exists^{\mathcal{U}} v \in V(E(v) = p).}$$

Notemos que como C es finito, efectivamente existe una preferencia tal que casi todos (según $\mathcal{U}$) tuvieron esa preferencia.

Tarea

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en V. La regla $\Sigma_{\mathcal{U}}$ es una regla justa.

¿Cuando estas reglas tienen dictadores?

Lema

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en V. Son equivalentes:

1. $\mathcal{U}$ es ultrafiltro principal.
2. $\Sigma_{\mathcal{U}}$ tiene dictador.

Notemos que si $\mathcal{U}$ es principal y $\{v\} \in \mathcal{U}$, entonces v es el dictador de $\Sigma_{\mathcal{U}}$.

Teorema

Sea Σ una regla justa. Existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro en V tal que $\Sigma = \Sigma_{\mathcal{U}}$.

Teorema

Sea Σ una regla justa. Existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro en V tal que $\Sigma = \Sigma_{\mathcal{U}}$.

Demostración

Definimos:

$$\mathcal{U} = \{A \subseteq V \mid A \text{ es } \Sigma\text{-decisivo}\}$$

Veamos que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro.

Por una equivalencia de ultrafiltro que vimos previamente, basta demostrar:

$\boxed{\text{Si partimos a V en a lo más 3 pedazos, uno de los pedazos es decisivo.}}$

Primero notemos que no puede haber 2 conjuntos decisivos ajenos (pues los ponemos a pelear entre ellos).

Ahora supongamos que $V = A \cup B \cup C$ y son ajenos. Sea $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ y nos fijamos en la regla $\Sigma_{\mathcal{P}}$.

Por el Teorema de Arrow para tres votantes, se sigue que $\Sigma_{\mathcal{P}}$ tiene un dictador. Podemos suponer que A es el dictador.

De esta manera, A es quasi decisivo y por el resultado anterior, A es decisivo.

$\boxed{\text{Concluimos que } \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro.}}$

Veamos que $\Sigma = \Sigma_{\mathcal{P}}$

Sea E una elección. Sea p tal que $\Sigma_{\mathcal{U}}(E) = p$. De esta manera, $A = \{v \mid E(v) = p\} \in \mathcal{U}$. Pero entonces A es decisivo y todos los v en A votaron como p, por lo que $\Sigma(E) = p$.

Teorema de la Posibilidad de Galvin

Sea C finito con $|C| \geq 3$ y V infinito.
Existe una regla justa sin dictadores.

Todo conjunto infinito tiene un ultrafiltro no principal.

Teorema de la Imposibilidad de Arrow

Sea C finito con $|C| \geq 3$ y V finito.
Toda regla justa tiene un dictador.

Todo ultrafiltro en un conjunto finito es principal.

Recordemos que necesitamos el Axioma de Elección para demostrar que existen los ultrafiltros no principales.

En un mundo sin elección, siempre habrá un dictador.

Isaac Goldbring