Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Table of Contents

Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Convenciones: Todos los espacios vectoriales serán $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Convenciones: Todos los espacios vectoriales serán $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Todas las transformaciones lineales serán $\mathbb{R}$-lineales.

Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Convenciones: Todos los espacios vectoriales serán $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Todas las transformaciones lineales serán $\mathbb{R}$-lineales.

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea $\leq$ una relación de orden parcial en V. Decimos que $(V, \leq)$ es un espacio vectorial ordenado si $\leq$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de V,

Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Convenciones: Todos los espacios vectoriales serán $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Todas las transformaciones lineales serán $\mathbb{R}$-lineales.

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea $\leq$ una relación de orden parcial en V. Decimos que $(V, \leq)$ es un espacio vectorial ordenado si $\leq$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de V, i.e. si $\leq$ satisface:

1. **Invariancia bajo traslaciones:** Si $v, w \in V$ son tales que $v \leq w$ entonces $v + z \leq w + z \ \forall z \in V$.

Espacios vectoriales parcialmente ordenados

Convenciones: Todos los espacios vectoriales serán $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Todas las transformaciones lineales serán $\mathbb{R}$-lineales.

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea $\leq$ una relación de orden parcial en V. Decimos que $(V, \leq)$ es un espacio vectorial ordenado si $\leq$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de V, i.e. si $\leq$ satisface:

1. **Invariancia bajo traslaciones:** Si $v, w \in V$ son tales que $v \leq w$ entonces $v + z \leq w + z \; \forall z \in V$.
2. **Invariancia bajo dilaciones positivas:** Si $v, w \in V$ son tales que $v \leq w$ entonces $rv \leq rw \; \forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

En dibujos

En dibujos

$\mathbb{R}^n$ lexicográfico

Problema

$\mathbb{R}$ con el orden usual, i.e. $x \leq y$ si existe $z \geq 0$ tal que $y = x + z$, es un espacio vectorial ordenado.

$\mathbb{R}^n$ lexicográfico

Problema

$\mathbb{R}$ con el orden usual, i.e. $x \leq y$ si existe $z \geq 0$ tal que $y = x + z$, es un espacio vectorial ordenado.

Problema

Sea $\leq_L$ la relación en $\mathbb{R}^2$ definida como: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ o $x_1 = x_2$ y $y_1 \leq y_2$. Demuestra que $(\mathbb{R}^2, \leq_L)$ es un espacio vectorial ordenado. Llamamos a $\leq_L$ la relación de orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$, a $(\mathbb{R}^2, \leq_L)$ $\mathbb{R}^2$ lexicográfico, y denotamos a $(\mathbb{R}^2, \leq_L)$ por $\mathbb{R}^2_L$.

$\mathbb{R}^n$ lexicográfico

Problema

$\mathbb{R}$ con el orden usual, i.e. $x \leq y$ si existe $z \geq 0$ tal que $y = x + z$, es un espacio vectorial ordenado.

Problema

Sea $\leq_L$ la relación en $\mathbb{R}^2$ definida como: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ o $x_1 = x_2$ y $y_1 \leq y_2$. Demuestra que $(\mathbb{R}^2, \leq_L)$ es un espacio vectorial ordenado. Llamamos a $\leq_L$ la relación de orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$, a $(\mathbb{R}^2, \leq_L)$ $\mathbb{R}^2$ lexicográfico, y denotamos a $(\mathbb{R}^2, \leq_L)$ por $\mathbb{R}^2_L$.

Problema

Define $\mathbb{R}^n_L$ para cada $n \geq 1$. Observa que $\mathbb{R}_L$ es igual a $\mathbb{R}$ con el orden usual.

$\mathbb{R}^n$ lexicográfico

$\mathbb{R}^n$ lexicográfico

$\mathbb{R}^n$ lexicográfico

Orden producto

Problema

Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathbb{R}^X$ a $\{f : X \to \mathbb{R}\}$. Observa que $\mathbb{R}^X$ es un espacio vectorial de dimensión $|X|$. Sea $\leq_P$ la relación en $\mathbb{R}^X$ tal que $f \leq_P g$ si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$. Demuestra que $(\mathbb{R}^X, \leq_P)$ es un espacio vectorial parcialmente ordenado. Llamamos a $\leq_P$ el orden producto en $\mathbb{R}^X$.

Orden producto

Problema

Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathbb{R}^X$ a $\{f : X \to \mathbb{R}\}$. Observa que $\mathbb{R}^X$ es un espacio vectorial de dimensión $|X|$. Sea $\leq_P$ la relación en $\mathbb{R}^X$ tal que $f \leq_P g$ si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$. Demuestra que $(\mathbb{R}^X, \leq_P)$ es un espacio vectorial parcialmente ordenado. Llamamos a $\leq_P$ el orden producto en $\mathbb{R}^X$.

Problema

Sea $n \geq 1$. Sea $X = \{1, ..., n\}$. Observa que en este caso $\mathbb{R}^X \cong \mathbb{R}^n$ y el orden producto $\leq_P$ en $\mathbb{R}^X$ induce en $\mathbb{R}^n$ estructura de espacio vectorial parcialmente ordenado. Denotamos por $\mathbb{R}^n_P$ a $\mathbb{R}^n$ con el orden producto. ¿Cómo se relacionan $\leq_L$ y $\leq_P$ en $\mathbb{R}^n$?

Orden producto

Orden producto

Orden producto

Intervalos convexos

Intervalos son convexos

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sean $v, w \in V$ tales que $v \leq w$. Demuestra que el intervalo $[v, w] = \{z \in V : v \leq z \leq w\}$ es convexo, i.e. si $a, b \in [v, w]$ y $t \in [0, 1]$ entonces $ta + (1-t)b \in [v, w]$.

Intervalos son convexos

Más ordenes tipo producto

En los siguientes ejemplos por 'orden producto' nos referimos a un orden parcial definido de la forma $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in X$.

Más ordenes tipo producto

En los siguientes ejemplos por 'orden producto' nos referimos a un orden parcial definido de la forma $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$.

Problema

Demuestra que los siguientes son espacios vectoriales parcialmente ordenados.

1. Sea X un conjunto. El espacio $\ell^\infty(X)$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas, con el orden 'producto'.

Más ordenes tipo producto

En los siguientes ejemplos por 'orden producto' nos referimos a un orden parcial definido de la forma $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$.

Problema

Demuestra que los siguientes son espacios vectoriales parcialmente ordenados.

1. Sea X un conjunto. El espacio $\ell^\infty(X)$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas, con el orden 'producto'.
2. El espacio $c_0(\mathbb{R})$ de sucesiones $\{a_n\}$ en $\mathbb{R}$ tales que $a_n \to 0$, con el orden 'producto'.

Más ordenes tipo producto

En los siguientes ejemplos por 'orden producto' nos referimos a un orden parcial definido de la forma $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$.

Problema

Demuestra que los siguientes son espacios vectoriales parcialmente ordenados.

1. Sea X un conjunto. El espacio $\ell^\infty(X)$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas, con el orden 'producto'.
2. El espacio $c_0(\mathbb{R})$ de sucesiones $\{a_n\}$ en $\mathbb{R}$ tales que $a_n \to 0$, con el orden 'producto'.
3. Sea X un espacio topológico. El espacio $C(X; \mathbb{R})$, de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$, con el orden 'producto'.

Más ordenes tipo producto

En los siguientes ejemplos por 'orden producto' nos referimos a un orden parcial definido de la forma $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in X$.

Problema

Demuestra que los siguientes son espacios vectoriales parcialmente ordenados.

1. Sea X un conjunto. El espacio $\ell^\infty(X)$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas, con el orden 'producto'.
2. El espacio $c_0(\mathbb{R})$ de sucesiones $\{a_n\}$ en $\mathbb{R}$ tales que $a_n \to 0$, con el orden 'producto'.
3. Sea X un espacio topológico. El espacio $C(X;\mathbb{R})$, de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$, con el orden 'producto'.
4. Sea (X,μ) espacio de medida. El espacio $L^\infty(X,\mu)$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ μ-esencialmente acotadas, con el orden 'producto' μ-a.e., i.e. $f(x) \leq g(x)\ \mu - a.e.(x)$.

Más ordenes tipo producto

En los siguientes ejemplos por 'orden producto' nos referimos a un orden parcial definido de la forma $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in X$.

Problema

Demuestra que los siguientes son espacios vectoriales parcialmente ordenados.

1. Sea X un conjunto. El espacio $\ell^\infty(X)$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas, con el orden 'producto'.
2. El espacio $c_0(\mathbb{R})$ de sucesiones $\{a_n\}$ en $\mathbb{R}$ tales que $a_n \to 0$, con el orden 'producto'.
3. Sea X un espacio topológico. El espacio $C(X;\mathbb{R})$, de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$, con el orden 'producto'.
4. Sea (X, μ) espacio de medida. El espacio $L^\infty(X, \mu)$ de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ μ-esencialmente acotadas, con el orden 'producto' μ-a.e., i.e. $f(x) \leq g(x)$ $\mu - a.e.(x)$.

Problema

¿Puedes poner a $\mathbb{R}^n_P$ en términos de 1,2,3 y 4?

Más ordenes producto

Más ordenes producto

Más ordenes producto

Table of Contents

El cono positivo

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Denotamos por V^+ al conjunto de $v \in V$ tales que $v \geq 0$. Llamamos a V^+ el cono positivo de V.

El cono positivo

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Denotamos por V^+ al conjunto de $v \in V$ tales que $v \geq 0$. Llamamos a V^+ el cono positivo de V.

Problema

El cono positivo de $\mathbb{R}$ con el orden usual es $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Calcula el cono positivo de los espacios vectoriales ordenados en las diapositivas anteriores, en particular calcula $\mathbb{R}_L^{n+}$ y $\mathbb{R}_P^{n+}$.

El cono positivo

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Denotamos por V^+ al conjunto de $v \in V$ tales que $v \geq 0$. Llamamos a V^+ el cono positivo de V.

Problema

El cono positivo de $\mathbb{R}$ con el orden usual es $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Calcula el cono positivo de los espacios vectoriales ordenados en las diapositivas anteriores, en particular calcula $\mathbb{R}_L^{n+}$ y $\mathbb{R}_P^{n+}$.

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. El cono positivo V^+ de V satisface:

1. $0 \in V^+$.
2. $V^+ + V^+ = V^+$, i.e. $v, w \in V^+$ entonces $v + w \in V^+$.
3. $V^+ \cap (-V^+) = \{0\}$.

El cono positivo

El cono positivo

El cono positivo

El cono positivo

Conos

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea $P \subseteq V$. Decímos que P es un cono en V si $rP = P$ para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$ en donde rP es el conjunto $\{rv : v \in P\}$.

En dibujos

En dibujos

Tipos de conos

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea P un cono de V. Decimos que P es:

1. Punteado, si $0 \in P$.
2. Convexo si $P + P \subseteq P$.
3. Propio si $P \cap (-P) = \{0\}$.
4. Generador si $P - P = V$, i.e. si cada $v \in V$ es de la forma $a - b$ con $a, b \in P$.

Tipos de conos

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea P un cono de V. Decimos que P es:

1. Punteado, si $0 \in P$.
2. Convexo si $P + P \subseteq P$.
3. Propio si $P \cap (-P) = \{0\}$.
4. Generador si $P - P = V$, i.e. si cada $v \in V$ es de la forma $a - b$ con $a, b \in P$.

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea P un cono en V. Decímos que P es un cono positivo si P satisface 1-3.

Conos punteados

Conos convexos

Conos propios

Conos generadores

Ordenes y conos

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea P un cono en V. Denotamos por $\leq_P$ a la relación en V tal que $v \leq_P w$ si $w - v \in P$.

Ordenes y conos

Definition

Sea V un espacio vectorial. Sea P un cono en V. Denotamos por $\leq_P$ a la relación en V tal que $v \leq_P w$ si $w - v \in P$.

Problema

Sea V un espacio vectorial. Sea P un cono en V. Si P es positivo la pareja $(V, \leq_P)$ es un espacio vectorial ordenado tal que con este orden $V^+ = P$. Concluye que para cada espacio vectorial V existe una biyección entre conos positivos en V y estructuras de espacio vectorial ordenado en V. Tarea

Moraleja: Es lo mismo definir un espacio parcialmente ordenado que definir un cono positivo. Conos positivos son 'versiones algebráicas' de ordenes parciales.

Otro orden parcial en $\mathbb{R}^2$

Problema

Demuestra que el conjunto $Q = \{(r, 0) : r \geq 0\}$ es un cono positivo en $\mathbb{R}^2$. ¿Es Q generador? Calcula explícitamente a la relación $\leq_Q$. Denotamos a $\mathbb{R}^2$ con este orden por $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$. Compara a $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ con $\mathbb{R}^2_P$ y $\mathbb{R}^2_L$. Tarea

Table of Contents

Unidades de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$. Decimos que Ω es una unidad de orden en V si para todo $v \in V$ existe $r > 0$ tal que $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$.

Unidades de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$. Decimos que Ω es una unidad de orden en V si para todo $v \in V$ existe $r > 0$ tal que $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$.

Problema

Demuestra que si $(1,1)$ es unidad de orden en $\mathbb{R}^2_L$ y $\mathbb{R}^2_P$. ¿$\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ tiene unidad de orden? Encuentra unidades de orden para los demás espacios vectoriales ordenados en las secciones anteriores. Demuestra que si $\Omega \in V$ es unidad de orden, entonces Λ es unidad de orden en V para cada $\Omega \leq \Lambda$.

Unidades de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$. Decimos que Ω es una unidad de orden en V si para todo $v \in V$ existe $r > 0$ tal que $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$.

Problema

Demuestra que si $(1,1)$ es unidad de orden en $\mathbb{R}^2_L$ y $\mathbb{R}^2_P$. ¿$\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ tiene unidad de orden? Encuentra unidades de orden para los demás espacios vectoriales ordenados en las secciones anteriores. Demuestra que si $\Omega \in V$ es unidad de orden, entonces Λ es unidad de orden en V para cada $\Omega \leq \Lambda$.

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$ una unidad de orden. Demuestra que:

1. $\Omega \in V^+$.
2. El cono V^+ es generador.

Unidades de orden

Unidades de orden

Unidades de orden

Seminorma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Denotamos por $||\cdot||_\Omega : V \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$||v||_\Omega = Inf\,\{r > 0 : -r\Omega \leq v \leq r\Omega\}$$

Seminorma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Denotamos por $||\cdot||_\Omega : V \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$||v||_\Omega = Inf\,\{r > 0 : -r\Omega \le v \le r\Omega\}$$

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que la función $||\cdot||_\Omega$ es una seminorma en V, i.e.

1. $||v|| \ge 0\ \forall v \in V$.
2. $||v + w||_\Omega \le ||v||_\Omega + ||w||_\Omega\ \forall v \in V$.
3. $||rv|| \le |r|||v||_\Omega\ \forall r \in \mathbb{R}, v \in V$.

Seminorma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Denotamos por $||\cdot||_\Omega : V \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$||v||_\Omega = Inf\,\{r > 0 : -r\Omega \leq v \leq r\Omega\}$$

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que la función $||\cdot||_\Omega$ es una seminorma en V, i.e.

1. $||v|| \geq 0\ \forall v \in V$.
2. $||v+w||_\Omega \leq ||v||_\Omega + ||w||_\Omega\ \forall v \in V$.
3. $||rv|| \leq |r|||v||_\Omega\ \forall r \in \mathbb{R}, v \in V$.

Llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la seminorma de orden de (V, Ω). $||\cdot||_\Omega$ depende de Ω.

Seminorma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Denotamos por $||\cdot||_\Omega : V \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$||v||_\Omega = Inf\,\{r > 0 : -r\Omega \leq v \leq r\Omega\}$$

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que la función $||\cdot||_\Omega$ es una seminorma en V, i.e.

1. $||v|| \geq 0 \; \forall v \in V$.
2. $||v+w||_\Omega \leq ||v||_\Omega + ||w||_\Omega \; \forall v \in V$.
3. $||rv|| \leq |r|||v||_\Omega \; \forall r \in \mathbb{R}, v \in V$.

Llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la seminorma de orden de (V,Ω). $||\cdot||_\Omega$ depende de Ω.

Problema

Encuentra un ejemplo de espacio vectorial ordenado con unidad de orden Ω tal que $||\cdot||_\Omega$ no es una norma. Pregunta: ¿Bajo que condiciones sobre V, Ω, $||\cdot||_\Omega$ es una norma?

Seminorma de orden

Seminorma de orden

Seminorma de orden

Seminorma de orden

Norma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Decímos que V es Arquimediano si siempre que $v \in V^+$ sea tal que existe $w \in V$ tal que $nv \leq w \; \forall n \geq 1$ entonces $v = 0$. Idea: V es Arquimediano si V^+ no tiene 'elementos infitesimales.'

Norma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Decímos que V es Arquimediano si siempre que $v \in V^+$ sea tal que existe $w \in V$ tal que $nv \leq w \ \forall n \geq 1$ entonces $v = 0$. Idea: V es Arquimediano si V^+ no tiene 'elementos infitesimales.'

Problema

Demuestra que $\mathbb{R}^2_P$ es Arquimediano. Demuestra que $\mathbb{R}^2_L$ no es Arquimediano ¿Es $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ Arquimediano?

Norma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Decímos que V es Arquimediano si siempre que $v \in V^+$ sea tal que existe $w \in V$ tal que $nv \leq w \ \forall n \geq 1$ entonces $v = 0$. Idea: V es Arquimediano si V^+ no tiene 'elementos infitesimales.'

Problema

Demuestra que $\mathbb{R}^2_P$ es Arquimediano. Demuestra que $\mathbb{R}^2_L$ no es Arquimediano ¿Es $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ Arquimediano?

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado Arquimediano. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que si $v \in V$ es tal que $r\Omega + v \geq 0 \ \forall r > 0$ entonces $v \in V^+$.

Norma de orden

Norma de orden

Norma de orden

Norma de orden

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que si V es Arquimediano entonces $||\cdot||_\Omega$ es una norma.

Hint: Usa el problema anterior. En este caso llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la norma de orden de (V, Ω). Concluye que si V un espacio vectorial ordenado Arquimediano con unidadde orden Ω entonces $(V, ||\cdot||_\Omega)$ es un espacio normado.

Norma de orden

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que si V es Arquimediano entonces $||\cdot||_\Omega$ es una norma.
Hint: Usa el problema anterior. En este caso llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la norma de orden de (V,Ω). Concluye que si V un espacio vectorial ordenado Arquimediano con unidadde orden Ω entonces $(V,||\cdot||_\Omega)$ es un espacio normado.

Problema

Sea V un espacio vectorial Arquimediano con unidad de orden Ω. Demuestra que Ω está en el interior de V^+.

Norma de orden

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que si V es Arquimediano entonces $||\cdot||_\Omega$ es una norma.
Hint: Usa el problema anterior. En este caso llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la norma de orden de (V,Ω). Concluye que si V un espacio vectorial ordenado Arquimediano con unidadde orden Ω entonces $(V, ||\cdot||_\Omega)$ es un espacio normado.

Problema

Sea V un espacio vectorial Arquimediano con unidad de orden Ω. Demuestra que Ω está en el interior de V^+.

Problema

Sean V, V' espacios vectoriales Arquimedianos con unidad de orden Ω, Ω'. Sea $T : V \to V'$ lineal tal que $T(V^+) \subseteq V'^+$. Si $T(\Omega) = \Omega'$ entonces T es continuo con $||T|| \leq 1$.

Norma de orden

Norma de orden

Norma de orden