Como construir una teoría física

Sesión de problemas II

XX Escuela de matemáticas CCM

Espacios vectoriales ordenados (y más)

Table of Contents

Unidades de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$. Decimos que Ω es una unidad de orden en V si para todo $v \in V$ existe $r > 0$ tal que $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$.

Unidades de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$. Decimos que Ω es una unidad de orden en V si para todo $v \in V$ existe $r > 0$ tal que $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$.

Problema

Demuestra que $(1, 1)$ es unidad de orden en $\mathbb{R}^2_L$ y $\mathbb{R}^2_P$.

Unidades de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$. Decimos que Ω es una unidad de orden en V si para todo $v \in V$ existe $r > 0$ tal que $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$.

Problema

Demuestra que $(1, 1)$ es unidad de orden en $\mathbb{R}^2_L$ y $\mathbb{R}^2_P$. ¿$\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ tiene unidad de orden?

$\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ u orden en $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$

$(x,y) \leq (z,w)$ si $y = w$, $x \leq z$

$\omega_2 = 0$

$(0,1) \leq r(\omega_1, 0)$ p ningún $r > 0$

Unidades de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$. Decimos que Ω es una unidad de orden en V si para todo $v \in V$ existe $r > 0$ tal que $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$.

Problema

Demuestra que $(1, 1)$ es unidad de orden en $\mathbb{R}^2_L$ y $\mathbb{R}^2_P$. ¿$\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ tiene unidad de orden?

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$ una unidad de orden. Demuestra que $\Omega \in V^+$.

Sup Ω unidad de orden

$\exists\ r>0$ tq $-r\Omega \leq \Omega$

$0 \leq (r+1)\Omega$ $r>0$ ent $r+1>0$

$1/r+1$ $0 \leq \Omega$

Unidades de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$. Decimos que Ω es una unidad de orden en V si para todo $v \in V$ existe $r > 0$ tal que $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$.

Problema

Demuestra que $(1,1)$ es unidad de orden en $\mathbb{R}^2_L$ y $\mathbb{R}^2_P$. ¿$\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ tiene unidad de orden?

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $\Omega \in V$ una unidad de orden. Demuestra que $\Omega \in V^+$.

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Si V tiene unidades de orden entonces el cono positivo V^+ de V es generador.

Unidades de orden

V esp vect ord con u orden Ω

P.d. V^+ genera a V ie

P.d. $v \in V \ \exists\ a.b \in V^+$ tq $v = a - b$

$\exists\ r > 0$ tq $-r\Omega \leq v \leq r\Omega$

$v + r\Omega \geq 0$ $\qquad$ $v = (v + r\Omega)$

$\Omega \geq 0 \quad r\Omega \geq 0$ $\qquad$ $- r\Omega$

$\mathbb{R}^{2\,+}_{\pi_2}$ no genera a $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$

Unidades de orden

Unidades de orden

Seminorma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Denotamos por $||\cdot||_\Omega : V \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$||v||_\Omega = Inf\ \{r > 0 : -r\Omega \leq v \leq r\Omega\}$$

Seminorma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Denotamos por $||\cdot||_\Omega : V \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$||v||_\Omega = Inf\,\{r > 0 : -r\Omega \leq v \leq r\Omega\}$$

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que la función $||\cdot||_\Omega$ es una seminorma en V, i.e.

1. $||v||_\Omega \geq 0\ \forall v \in V$.
2. $||v + w||_\Omega \leq ||v||_\Omega + ||w||_\Omega\ \forall v \in V$.
3. $||rv|| = |r|\,||v||_\Omega\ \forall r \in \mathbb{R}, v \in V$.

1\. $v \in V$ $\quad ||v||_\Omega = \inf\{-\} \geq 0$ $\quad \subseteq (0,\infty)$.

$||v+w||_\Omega \leq ||v||_\Omega + ||w||_\Omega$

$r \geq 0 \quad -r\Omega \leq v \leq r\Omega$

$s \geq 0 \quad -s\Omega \leq w \leq s\Omega$

$-(r+s)\Omega \leq v+w \leq (r+s)\Omega$

Seminorma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Denotamos por $||\cdot||_\Omega : V \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$||v||_\Omega = Inf\,\{r > 0 : -r\Omega \leq v \leq r\Omega\}$$

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que la función $||\cdot||_\Omega$ es una seminorma en V, i.e.

1. $||v|| \geq 0 \; \forall v \in V$.
2. $||v + w||_\Omega \leq ||v||_\Omega + ||w||_\Omega \; \forall v \in V$.
3. $||rv|| = |r|||v||_\Omega \; \forall r \in \mathbb{R}, v \in V$.

Llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la seminorma de orden de (V, Ω). $||\cdot||_\Omega$ depende de Ω.

Seminorma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Denotamos por $||\cdot||_\Omega : V \to \mathbb{R}$ a la función tal que

$$||v||_\Omega = Inf\,\{r > 0 : -r\Omega \leq v \leq r\Omega\}$$

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que la función $||\cdot||_\Omega$ es una seminorma en V, i.e.

1. $||v|| \geq 0\ \forall v \in V$.
2. $||v + w||_\Omega \leq ||v||_\Omega + ||w||_\Omega\ \forall v \in V$.
3. $||rv|| = |r|||v||_\Omega\ \forall r \in \mathbb{R}, v \in V$.

Llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la seminorma de orden de (V, Ω). $||\cdot||_\Omega$ depende de Ω.

Problema

Encuentra un ejemplo de espacio vectorial ordenado con unidad de orden Ω tal que $||\cdot||_\Omega$ no es una norma. ¿Bajo que condiciones sobre V, Ω, $||\cdot||_\Omega$ es una norma?

Seminorma de orden

Pd $\|(0,1)\|_{(1,1)} = 0$

$$\|(0,1)\|_{(1,1)} = \operatorname{Inf}\left\{ r>0 \quad -r(1,1) \leq_L (0,1) \leq_L r(1,1) \right\}$$

$$= \operatorname{Inf}\left\{ r>0 \quad (-r,-r) \leq_L (0,1) \leq_L (r,r) \right\}$$

$$= \operatorname{Inf}(0,\infty) = 0$$

Seminorma de orden

Seminorma de orden

Seminorma de orden

Norma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Decímos que V es Arquimediano si siempre que $v \in V$ sea tal que existe $w \in V$ tal que $nv \leq w \ \forall n \geq 1$ entonces $v \leq 0$. Idea: V es Arquimediano si V^+ no tiene 'elementos infitesimales.'

Norma de orden

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Decímos que V es Arquimediano si siempre que $v \in V$ sea tal que existe $w \in V$ tal que $nv \leq w \ \forall n \geq 1$ entonces $v \leq 0$. Idea: V es Arquimediano si V^+ no tiene 'elementos infitesimales.'

Problema

¿Son $\mathbb{R}^2_P, \mathbb{R}^2_L$ y $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ Arquimedianos?

$\mathbb{R}$ arquimediano

Norma de orden

Norma de orden

Norma de orden

Norma de orden

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que si V es Arquimediano entonces $||\cdot||_\Omega$ es una norma. En este caso llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la norma de orden de (V,Ω). Concluye que si V un espacio vectorial ordenado Arquimediano con unidad de orden Ω entonces $(V, ||\cdot||_\Omega)$ es un espacio normado y por lo tanto un TVE.

Pd $v \in V$ tq $\|v\|_\Omega = 0$ ent $v = 0$

$\|v\|_\Omega = 0$ ssi $\operatorname{Inf}\{r > 0 \quad v \in r[-\Omega, \Omega]\} = 0$

ssi $\forall r > 0 \ \exists \ 0 < s \leq r$ tq

$v \in s[-\Omega, \Omega] \leq r[-\Omega, \Omega]$

ssi $\|v\|_\Omega = 0$ ssi

$\forall r > 0$

$-r\Omega \leq v \leq r\Omega$

Norma de orden

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que si V es Arquimediano entonces $||\cdot||_\Omega$ es una norma. En este caso llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la norma de orden de (V,Ω). Concluye que si V un espacio vectorial ordenado Arquimediano con unidad de orden Ω entonces $(V, ||\cdot||_\Omega)$ es un espacio normado y por lo tanto un TVE.

Problema

Sea V un espacio vectorial Arquimediano con unidad de orden Ω. Demuestra que Ω está en el interior de V^+.

Norma de orden

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea Ω una unidad de orden en V. Demuestra que si V es Arquimediano entonces $||\cdot||_\Omega$ es una norma. En este caso llamámos a $||\cdot||_\Omega$ la norma de orden de (V,Ω). Concluye que si V un espacio vectorial ordenado Arquimediano con unidad de orden Ω entonces $(V, ||\cdot||_\Omega)$ es un espacio normado y por lo tanto un TVE.

Problema

Sea V un espacio vectorial Arquimediano con unidad de orden Ω. Demuestra que Ω está en el interior de V^+.

Problema

Sean V, V' espacios vectoriales Arquimedianos con unidad de orden Ω, Ω'. Sea $T : V \to V'$ lineal tal que $T(V^+) \subseteq V'^+$. Si $T(\Omega) = \Omega'$ entonces T es continuo con $||T|| \leq 1$.

Norma de orden

$\|nv\|_\Omega = n\|v\|_\Omega = 0 \quad \forall n \geq 1$

$\forall r > 0 \quad -r\Omega \leq \underbrace{nv \leq r\Omega}$

$r = 5 5 7 7 \quad w = r\Omega$

$nv \leq r\Omega \ \forall n \qquad v \leq 0$

$-v \geq 0 \qquad \|-v\|_\Omega = \|v\|_\Omega$

$= 0$

$-v \leq 0 \qquad \underline{v = 0}$

Norma de orden

Norma de orden

Table of Contents

Supremos e ínfimos

Definition

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decímos que x es cota inferior (superior) de A en X si $x \leq a$ ($x \geq a$) $\forall a \in A$.

Supremos e ínfimos

Definition

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decímos que x es cota inferior (superior) de A en X si $x \leq a$ ($x \geq a$) $\forall a \in A$.

Definition

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sea $A \subseteq X$. Definimos Inf$A$ y Sup$A$ como:

1. Inf$A$ es cota inferior de A y $x \leq$Inf$A$ para toda cota inferior x de A.
2. Sup$A$ es cota superior de A y Sup$A \leq x$ para toda cota superior x de A.

Supremos e ínfimos

Definition

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decímos que x es cota inferior (superior) de A en X si $x \leq a$ ($x \geq a$) $\forall a \in A$.

Definition

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sea $A \subseteq X$. Definimos Inf$A$ y Sup$A$ como:

1. Inf$A$ es cota inferior de A y $x \leq$Inf$A$ para toda cota inferior x de A.
2. Sup$A$ es cota superior de A y Sup$A \leq x$ para toda cota superior x de A.

Problema

Encuentra un conjunto parcialmente ordenado X en donde existen $x, y \in X$ tales que $\{x, y\}$ no tiene ni supremo ni infimo en X.

Supremos e ínfimos

Definition

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decímos que x es cota inferior (superior) de A en X si $x \leq a$ ($x \geq a$) $\forall a \in A$.

Definition

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sea $A \subseteq X$. Definimos Inf$A$ y Sup$A$ como:

1. Inf$A$ es cota inferior de A y $x \leq$Inf$A$ para toda cota inferior x de A.
2. Sup$A$ es cota superior de A y Sup$A \leq x$ para toda cota superior x de A.

Problema

Encuentra un conjunto parcialmente ordenado X en donde existen $x, y \in X$ tales que $\{x, y\}$ no tiene ni supremo ni infimo en X.

Definition

Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decímos que $(X, \leq)$ es una retícula si para todo $x, y \in X$ el conjunto $\{x, y\}$ tiene infimo y supremo en X

Espacios de Riesz

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $A \subseteq V$. A tiene supremo en V si y sólo si $-A$ tiene ínfimo en V. En ese caso $-\text{Sup}A = \text{Inf}-A$.
Demuestra lo mismo intercambiando Sup e Inf.

Espacios de Riesz

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $A \subseteq V$. A tiene supremo en V si y sólo si $-A$ tiene ínfimo en V. En ese caso $-\mathrm{Sup}A = \mathrm{Inf}{-A}$. Demuestra lo mismo intercambiando Sup e Inf.

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. V s una retícula.
2. $\{v, w\}$ tiene supremo en V $\forall v, w \in V$.
3. $\{v, w\}$ tiene ínfimo en V $\forall v, w \in V$.

Espacios de Riesz

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Sea $A \subseteq V$. A tiene supremo en V si y sólo si $-A$ tiene ínfimo en V. En ese caso $-\text{Sup}A = \text{Inf}-A$. Demuestra lo mismo intercambiando Sup e Inf.

Problema

Sea V un espacio vectorial ordenado. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. V s una retícula.
2. $\{v, w\}$ tiene supremo en V $\forall v, w \in V$.
3. $\{v, w\}$ tiene ínfimo en V $\forall v, w \in V$.

Definition

Sea V un espacio vectorial ordenado. Decímos que V es un espacio de Riesz si V satisface las condiciones del problema anterior.

Espacios de Riesz

Ejemplos

Problema Demuestra que $\mathbb{R}$ con el orden usual es un espacio de Riesz. Más generalmente, demuestra que $\mathbb{R}^n_L$ es un espacio de Riesz $\forall n \geq 1$. Demuestra que para cada conjunto X el espacio $\mathbb{R}^X_P$ es un espacio de Riesz. Concluye en particular que $\mathbb{R}^n_P$ también es un espacio de Riesz $\forall n$ ¿Es $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ espacio de Riesz?

Ejemplos

Problema Demuestra que $\mathbb{R}$ con el orden usual es un espacio de Riesz. Más generalmente, demuestra que $\mathbb{R}^n_L$ es un espacio de Riesz $\forall n \geq 1$. Demuestra que para cada conjunto X el espacio $\mathbb{R}^X_P$ es un espacio de Riesz. Concluye en particular que $\mathbb{R}^n_P$ también es un espacio de Riesz $\forall n$ ¿Es $\mathbb{R}^2_{\pi_1}$ espacio de Riesz?

Observación

Los espacios de la forma $\mathbb{R}^X_P$ modelan espacios de distribuciones estadísticas en un sistema físico clásico modelado por X, e.g. El conjunto de dígitos binarios (bits) es el conjunto de parejas (ϵ, ϵ') en donde $\epsilon, \epsilon' \in \{0,1\}$, i.e. es $\{0,1\}^2$. El espacio de distribuciones estadísticas en el conjunto de bits es $\mathbb{R}_P^{\{0,1\}^2}$, que es isomorfo, como espacio vectorial real ordenado a $\mathbb{R}^4_P$.

Ejemplos

Ejemplos

Ejemplos

Espacios de distribuciones

Observación

En general consideramos distribuciones en sistemas clásicos como funciones 'de algún tipo' i.e. continuas, medibles, etc.

Espacios de distribuciones

Observación

En general consideramos distribuciones en sistemas clásicos como funciones 'de algún tipo' i.e. continuas, medibles, etc.

Problema

Sea X un espacio topológico. Demuestra que $C(X;\mathbb{R})$ es un espacio de Riesz.

Espacios de distribuciones

Observación

En general consideramos distribuciones en sistemas clásicos como funciones 'de algún tipo' i.e. continuas, medibles, etc.

Problema

Sea X un espacio topológico. Demuestra que $C(X;\mathbb{R})$ es un espacio de Riesz.

Theorem

Para todo espacio de Riesz V con unidad de orden Ω existe un espacio topológico Hausdorff localmente compacto X tal que V es un subespacio de $C(X;\mathbb{R})$. Moraleja: Los espacios de Riesz son los espacios parcialmente ordenados que corresponden a estados de sistemas clásicos.

Ejemplos

Ejemplos

Antiretículas

Pregunta

¿Te puedes imaginar una condición sobre un espacio vectorial parcialmente ordenado que describa las propiedades opuestas a la propiedad de ser un espacio de Riesz?

$v \leq w \qquad \{v, w\}$

$\inf\{v, w\} = v$

$\sup\{v, w\} = w$

Antiretículas

Pregunta

¿Te puedes imaginar una condición sobre un espacio vectorial parcialmente ordenado que describa las propiedades opuestas a la propiedad de ser un espacio de Riesz?

Definition

V

Sea $\cancel{(X, \leq)}$ un espacio vectorial parcialmente ordenado. Decímos que V $\cancel{(X, \leq)}$ es una antiretícula si siempre que $v, w \in V$ son tales que $\mathrm{Sup}\{v, w\}$ (eq. $\mathrm{Inf}\{v, w\}$) exíste, entonces $v \leq w$ o $w \leq v$.

Antiretículas

Pregunta

¿Te puedes imaginar una condición sobre un espacio vectorial parcialmente ordenado que describa las propiedades opuestas a la propiedad de ser un espacio de Riesz?

Definition

Sea $(X, \leq)$ un espacio vectorial parcialmente ordenado. Decímos que $(X, \leq)$ es una antiretícula si siempre que $v, w \in V$ son tales que $\mathrm{Sup}\{v, w\}$ (eq. $\mathrm{Inf}\{v, w\}$) exíste, entonces $v \leq w$ o $w \leq v$.

Problema

Demuestra que $\mathbb{R}$ es una antiretícula.

Antiretículas

Pregunta

¿Te puedes imaginar una condición sobre un espacio vectorial parcialmente ordenado que describa las propiedades opuestas a la propiedad de ser un espacio de Riesz?

Definition

Sea $(X, \leq)$ un espacio vectorial parcialmente ordenado. Decímos que $(X, \leq)$ es una antiretícula si siempre que $v, w \in V$ son tales que $\mathrm{Sup}\{v, w\}$ (eq. $\mathrm{Inf}\{v, w\}$) exíste, entonces $v \leq w$ o $w \leq v$.

Problema

Demuestra que $\mathbb{R}$ es una antiretícula. Demuestra que un espacio de Riesz es una antiretícula si y sólo si es linealmente ordenado.

Antiretículas

Pregunta

¿Te puedes imaginar una condición sobre un espacio vectorial parcialmente ordenado que describa las propiedades opuestas a la propiedad de ser un espacio de Riesz?

Definition

Sea $(X, \leq)$ un espacio vectorial parcialmente ordenado. Decímos que $(X, \leq)$ es una antiretícula si siempre que $v, w \in V$ son tales que $\mathrm{Sup}\{v, w\}$ (eq. $\mathrm{Inf}\{v, w\}$) exíste, entonces $v \leq w$ o $w \leq v$.

Problema

Demuestra que $\mathbb{R}$ es una antiretícula. Demuestra que un espacio de Riesz es una antiretícula si y sólo si es linealmente ordenado. Concluye que $\mathbb{R}^n_P$ y $\mathbb{R}^n_L$ son antiretículas sólo en el caso en el que $n = 1$.

Antiretículas

Espacios de materices autoadjuntas

Problema

Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es autadjunta si $A = A^*$, (eq. si todos los valores propios de A son reales, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A \cdot \rangle$ es real.) Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_h$ al conjunto de matrices autoadjuntas en $M_n(\mathbb{C})$. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_h$ hereda de $M_n(\mathbb{C})$ estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad (A+B)^* = A^* + B^*$

B

$z \in \mathbb{C}$ $\quad (zA)^* = \bar{z} A^*$

$A, B \in M_n(\mathbb{C})_h$. $\quad r \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{A + rB \in M_n(\mathbb{C})_h}$

$(A+rB)^* = A^* + \bar{r} B^*$

$= A + rB$

Espacios de materices autoadjuntas

Problema

Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es autadjunta si $A = A^*$, (eq. si todos los valores propios de A son reales, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A\cdot \rangle$ es real.) Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_h$ al conjunto de matrices autoadjuntas en $M_n(\mathbb{C})$. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_h$ hereda de $M_n(\mathbb{C})$ estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Observación: Los espacios $M_n(\mathbb{C})_h$ modelan espacios de estados mixtos en sistemas físicos de dimensión finita, e.g. un qubit es una combinación lineal compleja $z|\epsilon\cancel{1}\rangle + z'|\epsilon'\rangle$ con $\epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}$. $\mathbb{C}^2$ modela al espacio de qubits y $M_2(\mathbb{C})_h$ es el espacio de estados mixtos en este espacio.

Espacios de materices autoadjuntas

Problema
Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es autadjunta si $A = A^*$, (eq. si todos los valores propios de A son reales, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A\cdot \rangle$ es real.) Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_h$ al conjunto de matrices autoadjuntas en $M_n(\mathbb{C})$. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_h$ hereda de $M_n(\mathbb{C})$ estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Observación: Los espacios $M_n(\mathbb{C})_h$ modelan espacios de estados mixtos en sistemas físicos de dimensión finita, e.g. un qubit es una combinación lineal compleja $z|\epsilon_1\rangle + z'|\epsilon'\rangle$ con $\epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}$. $\mathbb{C}^2$ modela al espacio de qubits y $M_2(\mathbb{C})_h$ es el espacio de estados mixtos en este espacio.

Moraleja: Deberíamos poder definir en $M_n(\mathbb{C})_h$ un cono positivo de manera natural.

Cono positivo

Problema

Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es positiva semi-definida si existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$ (eq. si todos los valores propios de A son no negativos, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A \cdot \rangle$ es semi-definida positiva). Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ al conjunto de matrices positivas semi-definidas. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ es un cono positivo para $M_n(\mathbb{C})_h$. Así $(M_n(\mathbb{C})_h, M_n(\mathbb{C})_{\geq 0})$ es un espacio vectorial real ordenado.

Cono positivo

Problema

Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es positiva semi-definida si existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$ (eq. si todos los valores propios de A son no negativos, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A \cdot \rangle$ es semi-definida positiva). Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ al conjunto de matrices positivas semi-definidas. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ es un cono positivo para $M_n(\mathbb{C})_h$. Así $(M_n(\mathbb{C})_h, M_n(\mathbb{C})_{\geq 0})$ es un espacio vectorial real ordenado. ¿Tiene unidad de orden?

Cono positivo

Problema

Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es positiva semi-definida si existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$ (eq. si todos los valores propios de A son no negativos, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A \cdot \rangle$ es semi-definida positiva). Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ al conjunto de matrices positivas semi-definidas. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ es un cono positivo para $M_n(\mathbb{C})_h$. Así $(M_n(\mathbb{C})_h, M_n(\mathbb{C})_{\geq 0})$ es un espacio vectorial real ordenado. ¿Tiene unidad de orden? ¿Es Arquimediano?

Cono positivo

Problema

Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es positiva semi-definida si existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$ (eq. si todos los valores propios de A son no negativos, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A\cdot \rangle$ es semi-definida positiva). Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ al conjunto de matrices positivas semi-definidas. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ es un cono positivo para $M_n(\mathbb{C})_h$. Así $(M_n(\mathbb{C})_h, M_n(\mathbb{C})_{\geq 0})$ es un espacio vectorial real ordenado. ¿Tiene unidad de orden? ¿Es Arquimediano?

Problema

Demuestra que como espacios vectoriales reales $M_2(\mathbb{C})_h$ y $\mathbb{R}^{\{0,1\}^2}$ son isomorfos.

Cono positivo

Problema

Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es positiva semi-definida si existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$ (eq. si todos los valores propios de A son no negativos, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A\cdot \rangle$ es semi-definida positiva). Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ al conjunto de matrices positivas semi-definidas. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ es un cono positivo para $M_n(\mathbb{C})_h$. Así $(M_n(\mathbb{C})_h, M_n(\mathbb{C})_{\geq 0})$ es un espacio vectorial real ordenado. ¿Tiene unidad de orden? ¿Es Arquimediano?

Problema

Demuestra que como espacios vectoriales reales $M_2(\mathbb{C})_h$ y $\mathbb{R}^{\{0,1\}^2}$ son isomorfos. Pregunta: ¿Son $M_2(\mathbb{C})_h$ y $\mathbb{R}^{\{0,1\}^2}$ isomorfos como espacios vectoriales ordenados?

Cono positivo

Problema

Sea $n \geq 1$. Recuerda que una matríz $A \in M_n(\mathbb{C})$ es positiva semi-definida si existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$ (eq. si todos los valores propios de A son no negativos, eq. si la forma bilineal $\langle \cdot, A\cdot \rangle$ es semi-definida positiva). Denotamos por $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ al conjunto de matrices positivas semi-definidas. Demuestra que $M_n(\mathbb{C})_{\geq 0}$ es un cono positivo para $M_n(\mathbb{C})_h$. Así $(M_n(\mathbb{C})_h, M_n(\mathbb{C})_{\geq 0})$ es un espacio vectorial real ordenado. ¿Tiene unidad de orden? ¿Es Arquimediano?

Problema

Demuestra que como espacios vectoriales reales $M_2(\mathbb{C})_h$ y $\mathbb{R}^{\{0,1\}^2}$ son isomorfos. Pregunta: ¿Son $M_2(\mathbb{C})_h$ y $\mathbb{R}^{\{0,1\}^2}$ isomorfos como espacios vectoriales ordenados? Respuesta:

Theorem (Kadison)

Sea $n \geq 1$. El espacio parcialmente ordenado $(M_n(\mathbb{C})_h, M_n(\mathbb{C})_{\geq 0})$ es una antiretícula.

Cono positivo

Cono positivo

Cono positivo

Evaluando sistemas en el formalismo positivo

Evaluando sistemas en el formalismo positivo

Evaluando sistemas en el formalismo positivo

Evaluando sistemas en el formalismo positivo